

Christian GENTILI

Guide de localisation des astres

Guide de localisation des astres

Christian Gentili



17, avenue du Hoggar – P.A. de Courtabœuf
BP 112, 91944 Les Ulis Cedex A

Couverture : Jérôme Lo Monaco

Maquette intérieure : Exegraph

ISBN : 978-2-7598-0059-9

Imprimé en France

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2008

*Grâce à toi, Fabrice,
qui voulait toujours aller au fond des choses,
cet ouvrage a pu voir le jour.*

Sommaire

Avant-propos	15
---------------------------	-----------

Chapitre 1 Mécanique céleste

1 Structure cosmique	20
1.1 Notre système solaire	20
<i>Soleil</i>	<i>20</i>
<i>Planètes</i>	<i>20</i>
<i>Astéroïdes et comètes</i>	<i>21</i>
<i>Autres corps</i>	<i>22</i>
Satellites naturels	22
Satellites artificiels	22
1.2 Galaxies	23
<i>Notre Galaxie</i>	<i>23</i>
<i>Amas galactiques</i>	<i>24</i>
2 Durées	25
2.1 Jours et années	25
<i>Les différents jours</i>	<i>25</i>
Jour sidéral	25
Jour solaire	25
<i>Les différentes années</i>	<i>27</i>
Année sidérale	27
Année tropique	27
Année julienne, calendriers julien et grégorien	28

2.2 Périodes	28
<i>Périodes synodique et sidérale</i>	28
<i>Relation entre les deux périodes</i>	29
3 Distances	30
3.1 Unité astronomique	31
3.2 Année-lumière et parsec	33
Exercices	36
E1-1 Jour Julien	36
E1-2 Périodes des planètes	37

Chapitre 2

Rappels sur les coniques

1 Définition par foyer et directrice	44
1.1 Équation cartésienne	44
1.2 Équation polaire	45
<i>Établissement de l'équation</i>	45
<i>Cas de l'ellipse</i>	46
Détermination de a, c, b	47
Détermination de p, k, d, e	47
Précisions sur le vocabulaire	47
<i>Cas de l'hyperbole</i>	48
1.3 Passage de l'équation polaire à l'équation cartésienne	48
<i>Cas où $e \neq 1$</i>	48
<i>Cas où $e = 1$</i>	49
2 Définition bifocale	49
2.1 Cas de l'ellipse	49
2.2 Cas de l'hyperbole	49
3 Évolution des courbes représentatives	50
3.1 Cas $e \rightarrow 0$	51
3.2 Cas $e \rightarrow \infty$	51
Exercices	52
E2-1 Géométrie de l'ellipse en fonction du demi-grand axe et de l'excentricité	52
E2-2 Équation commune aux coniques en fonction du paramètre et de l'excentricité	54

Chapitre 3

Mouvements à accélération centrale

1	Rappels de cinématique du point	58
2	Propriétés du mouvement à accélération centrale	59
2.1	Définition du mouvement à accélération centrale.....	59
2.2	Loi des aires	60
2.3	Formules de Binet	61
	Établissement des formules	61
	Application dans le cas où $\vec{\Gamma} = -\frac{\mu}{\rho^2} \vec{I}$	61
3	Expressions de V et Γ selon l'excentricité	62
3.1	Expressions de la vitesse	62
	Cercle ($e = 0$)	62
	Ellipse ($0 < e < 1$)	62
	Parabole ($e = 1$)	63
	Hyperbole ($e > 1$)	64
3.2	Expressions de l'accélération centrale	64
	Cercle	64
	Ellipse	64
	Parabole	64
	Hyperbole	65
4	Orientation du vecteur vitesse	65
4.1	Angle avec le rayon vecteur	65
4.2	Composantes du vecteur vitesse	66
	exercices	68
E3-1	Vitesses en certains points de l'ellipse ; relations déduites	68
E3-2	Vitesses des planètes du système solaire	70

Chapitre 4

Mouvement dans le repère de Frenet

1	Détermination du repère de Frenet	74
2	Rayon de courbure	75
2.1	Définition	75

2.2 Expressions	76
<i>Calcul de $R(\rho, \rho', \rho'')$</i>	76
<i>Expression dans le cas où la trajectoire est une conique,</i> <i>$\rho = p/l + e \cos \theta$</i>	76
3 Accélération, composantes et module	77
3.1 Expressions générales	77
3.2 Composante tangentielle Γ_τ	78
<i>Accélération tangentielle dans le cas du mouvement</i> <i>à accélération centrale</i>	78
<i>Cas où l'accélération centrale est en $1/\rho^2$,</i> <i>c'est-à-dire $\rho = p/l + e \cos \theta$</i>	79
3.3 Composante normale Γ_N	79
<i>Accélération normale dans le cas du mouvement</i> <i>à accélération centrale</i>	79
<i>Cas où l'accélération centrale est en $1/\rho^2$,</i> <i>c'est-à-dire $\rho = p/l + e \cos \theta$</i>	80
3.4 Module et expressions vectorielles	80
<i>Module</i>	80
<i>Cas du mouvement obéissant à la loi des aires</i>	80
<i>Cas où la trajectoire est une conique</i>	80
<i>Expressions vectorielles</i>	80
Exercices	82
E4-1 Accélération centrale de la forme $\vec{\Gamma} = -\frac{K}{\rho^3} \vec{I}$	82
E4-2 Cas particulier : accélération centrale de la forme $\vec{\Gamma} = -\frac{C^2}{\rho^3} \vec{I}$...	84

Chapitre 5

Anomalie et orbite

1 Anomalies	88
1.1 Temps du passage	88
<i>Définitions</i>	88
<i>Équation de Kepler</i>	89
1.2 Relations entre anomalies vraie et excentrique	89
<i>Rayons ρ et ρ'</i>	89
<i>Relations trigonométriques liant θ et φ</i>	89
<i>Application à l'expression de la vitesse et de l'accélération</i>	90

2 Paramétrage avec l'anomalie excentrique	91
2.1 Caractérisation paramétrique de l'ellipse	91
Coordonnées en fonction du paramètre φ	91
Vecteur tangent unitaire $\vec{t}$ et équation de la normale en P	91
Vecteur normal unitaire $\vec{n}$ et équation de la tangente en P	92
Construction géométrique de la tangente et de la normale	93
Rayon de courbure	94
2.2- Équation paramétrique de la développée	95
Exercices	97
E5-1 Temps de l'intersection d'une comète avec l'écliptique	97
E5-2 Durée et date des saisons.....	102
E5-3 Réflexion sur l'ellipse	104

Chapitre 6

3^e loi de Kepler et référentiels

1 Lois de Kepler pour un centre attractif fixe	110
1.1 Rappel des hypothèses.....	110
1.2 3 ^e loi de Kepler.....	111
Formulation	111
Expressions numériques	112
2 Correction à la 3^e loi de Kepler	113
2.1 Référentiel galiléen.....	113
Cas de deux corps A et B	113
Cas de l'ensemble de corps $A, B, C, \dots, K$	114
2.2 Référentiel relatif	115
Accélérations dans un référentiel galiléen.....	115
Accélérations dans le référentiel héliocentrique.....	115
Accélérations dans un référentiel lié à la planète.....	116
2.3 Masses des planètes et des satellites	116
Exercices	119
E6-1 Système de deux corps dans le référentiel du centre de masse	119
E6-2 Système planète-satellite naturel.....	122

Chapitre 7

Énergie et vitesse selon la trajectoire

1 Caractérisation énergétique des trajectoires	128
1.1 Énergie potentielle, cinétique et mécanique	128
Énergie potentielle E_p	128
Énergie cinétique E_c	129
Énergie mécanique E	130
Énergie fournie E_f	131
1.2 Trajectoire déduite de la loi de conservation de l'énergie	132
2 Vitesses et trajectoires	133
2.1 Vitesses cosmiques	133
1 ^{re} vitesse cosmique	133
2 ^e vitesse cosmique	134
2.2 Paramètres altitude et vitesse de lancement	136
Exercices	139
E7-1 Satellite géostationnaire	139
E7-2 Transfert d'orbite de Hohmann	141
E7-3 Trajectoire à énergie minimale vers Mars	146
E7-4 Interaction sonde-planète	151

Chapitre 8

Formules pour mouvement elliptique

1 Formulaire déduit du paramétrage	160
1.1. Relations en fonction de la période T , du demi-grand axe a , de l'excentricité e	160
1.2. Relations en fonction de la constante d'accélération μ , du demi-grand axe a , de l'excentricité e	161
1.3 Relations en fonction de la constante d'accélération μ , de l'énergie massique $\frac{E}{m}$, de l'excentricité e	161
1.4. Relations en fonction de la constante d'accélération μ , de la période T , de l'excentricité e	162
1.5. Relations en fonction de la période T , de l'énergie massique $\frac{E}{m}$, de l'excentricité e	163

2	Longueur et surface des orbites elliptiques	164
2.1	Longueur de l'orbite	164
	<i>Rappel des formules mathématiques</i>	164
	Longueur d'un arc de courbe	164
	Expression en coordonnées polaires	165
	Expression en coordonnées paramétriques	165
	<i>Application à l'ellipse</i>	165
	Expression en coordonnées polaires	165
	Expression en coordonnées paramétriques	165
	Expression à partir de la vitesse	166
	<i>Approche du périmètre</i>	166
	Obtention par développement en série d'une intégrale elliptique	166
	Expressions en fonction des demi-grand axe et petit axe	167
	<i>Longueur d'orbites planétaires</i>	168
2.2	Surface de l'orbite	169
	<i>Aire d'un secteur</i>	169
	<i>Application à l'ellipse</i>	170
	<i>Angle médian</i>	171
	Exercices	173
E8-1	Caractérisation du mouvement elliptique par rayons et vitesse	173
E8-2	Éléments orbitaux en fonction de la période et de la vitesse	
	au péricentre et à l'apocentre	174
E8-3	Trajectoire déduite du rayon et du vecteur vitesse en un point	177
E8-4	Trajectoire de la sonde <i>Giotto</i> vers la comète de Halley :	
	le problème de Lambert	180

Chapitre 9

Repérage des astres par rapport à la Terre

1	Coordonnées géographiques	188
1.1	Parallèles et latitude	188
1.2	Méridiens et longitude	188
1.3	Coordonnées d'un point géographique	188
2	Coordonnées locales	190
2.1	Définition du repère	190
2.2	Hauteur et azimut d'un astre	190
2.3	Vertical de l'astre et plan méridien du lieu	191

2.4	Distance zénithale.....	192
2.5	Monture alt-azimutale	193
3	Coordonnées horaires	194
3.1	Repère lié à la sphère terrestre.....	194
3.2	Déclinaison	194
3.3	Cercle horaire de l'astre et angle horaire.....	195
3.4	Angle horaire et temps.....	197
3.5	Monture équatoriale.....	197
4	Relations entre coordonnées horaires et locales	198
4.1	Triangle sphérique.....	198
	<i>Triangle de position</i>	198
	<i>Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique</i>	199
4.2	Passage des coordonnées horaires aux coordonnées horizontales	201
	<i>Détermination de la hauteur h</i>	201
	<i>Détermination de l'azimut Z</i>	202
	<i>Point astronomique</i>	203
4.3	Passage des coordonnées horizontales aux coordonnées horaires	204
	Exercices	205
E9-1	Orthodromie	205
E9-2	Intérêt d'une base de lancement équatoriale	206
E9-3	Coordonnées d'un satellite géostationnaire au lieu d'observation	211
E9-4	Coordonnées locales du Soleil au cours de la journée.....	214

Chapitre 10

Coordonnées équatoriales et écliptiques

1	Voûte céleste	220
1.1	Constellations	220
1.2	Magnitude	222
1.3	Nom des étoiles	222
1.4	Catalogues des étoiles et objets non stellaires.....	223
2	Coordonnées équatoriales	223
2.1	Repère lié à la sphère céleste	223
2.2	Déclinaison	224

2.3 Ascensions verse et droite	225
2.4 Passerelle avec les coordonnées horaires	226
2.5 Coordonnées de quelques étoiles	227
3 Coordonnées écliptiques	228
3.1 Repère, latitude b et longitude l	228
3.2 Relations de passage entre coordonnées écliptiques et équatoriales	230
<i>Coordonnées équatoriales (α, δ) à écliptiques (l, b)</i>	230
<i>Coordonnées écliptiques (l, b) à équatoriales (α, δ)</i>	231
4 Temps	231
4.1 Temps dérivés du temps solaire	231
<i>Temps solaire vrai local</i>	231
<i>Temps solaire moyen</i>	232
<i>Équation du temps</i>	232
<i>Temps civil</i>	233
<i>Temps universels et fuseaux horaires</i>	233
<i>Temps légal</i>	234
4.2 Temps des éphémérides et temps atomique international	234
<i>Temps des éphémérides</i>	234
<i>Temps atomique international</i>	235
<i>Temps universel coordonné</i>	235
4.3 Temps sidéral	236
Exercices	239
E10-1 Matrices rotations appliquées au changement de systèmes	
de coordonnées	239
E10-2 Influence du recul du point γ sur la dérive des étoiles	243
E10-3 Lever, coucher, passage au méridien des étoiles	246
E10-4 Visibilité des étoiles	250

Chapitre 11

Repérage des orbites et éphémérides

1 Éléments d'orbites	254
1.1 Plans et axes de repère	254
<i>Plan orbital</i>	254
<i>Plan de référence</i>	254
<i>Ligne des nœuds</i>	254
<i>Ligne de référence</i>	255

1.2 Position de l'orbite	255
<i>Ascension droite</i>	255
<i>Inclinaison.....</i>	255
<i>Argument du péricentre.....</i>	256
1.3 Position de l'astre sur l'orbite	256
<i>Par anomalie vraie</i>	256
<i>Par anomalie moyenne</i>	257
<i>Date au périhélie.....</i>	257
 2 Variables elliptiques et éphémérides.....	258
2.1 Éléments moyens	258
2.2 Théories planétaires, base des éphémérides.....	261
<i>Le problème à N corps pour les planètes.....</i>	261
<i>Historique de sa résolution</i>	261
 3 Coordonnées dans un repère de référence donné.....	262
3.1 Cas d'un satellite terrestre	262
3.2 Cas d'une planète	264
<i>Passage des coordonnées orbitales à écliptiques</i>	264
<i>Translation du repère écliptique</i>	264
 Exercices	266
E11-1 Satellites semi-synchrones MOLNYA	266
E11-2 De la trajectoire elliptique aux coordonnées équatoriales de Vénus	273
E11-3 Coordonnées équatoriales de Vénus par les éphémérides	279
 Index	283

Avant-propos

Notre univers ne cesse de nous fasciner et nombreux sont ceux qui consacrent leur vie professionnelle ou leurs loisirs à son observation, afin d'en percer les mystères...

Il y a de par le monde des milliers de clubs et de sociétés d'astronomie. Parallèlement, les programmes spatiaux d'exploration de notre système solaire sont toujours actifs et sont passés du stade de compétition à celui, très fructueux, de coopérations internationales orchestrées par des organisations prestigieuses telles que la NASA, l'Institut russe de la recherche spatiale, l'Agence spatiale européenne...

Pointer un télescope sur un astre ou une antenne sur un satellite, déduire sa position de celle des étoiles et connaître l'instant du crépuscule, définir le mouvement d'une sonde dans le milieu interplanétaire, déterminer à un instant donné la position d'une comète ou d'un satellite artificiel sur l'orbite assignée par sa mission sont autant de problèmes qui, nous l'espérons, trouveront leur solution dans le présent ouvrage. Dans cet objectif, et afin de s'adresser au plus grand nombre, nous avons adopté une démarche très progressive, guidée également par le souci d'éviter au lecteur d'avoir à rechercher dans d'autres sources les supports mathématiques et physiques nécessaires à la compréhension.

Le milieu au sein duquel nous évoluerons, le système solaire, est présenté dans un chapitre introductif où nous précisons un certain nombre de grandeurs astronomiques fondamentales. À ce stade, il convient de saluer le travail des astronomes, en particulier dans le domaine de la mesure et des unités ;

aussi nous sommes-nous imposés d'écrire les grandeurs données et calculées avec la précision qui s'impose. La précision ultime pourra être recherchée par exemple dans les publications du Bureau des longitudes mentionnées en bibliographie. Six chapitres vont ensuite nous faire découvrir les trajectoires et les mouvements imposés par la gravitation universelle.

Grâce à la première loi de Kepler, nous savons que les planètes, comètes, satellites artificiels, décrivent des coniques : un rappel mathématique, effectué au chapitre 2, nous permettra de déduire de ces courbes un certain nombre de caractéristiques bien utiles pour la suite. Le système de coordonnées polaires avec le repère de Frenet est bien adapté à l'étude de ces mouvements plans, générés par une accélération centrale ; c'est ce que nous montrerons aux chapitres 3 et 4.

L'angle polaire de la trajectoire elliptique est l'anomalie vraie ; toutefois, l'équation de Kepler donne la position de l'astre à un instant donné en fonction de l'anomalie excentrique. La loi des aires, ou deuxième loi de Kepler, permet d'aboutir à cette équation fondamentale. Ces points seront développés au chapitre 5. La troisième loi sera présentée au chapitre 6, où nous indiquons les corrections à apporter afin de préserver le caractère réciproque des forces de gravitation ; ce sera l'occasion de nous pencher sur la nature des référentiels.

Enfin, une autre conséquence pour un corps soumis à une force d'origine gravitationnelle est que l'énergie mécanique sur la trajectoire est constante ; cela nous permettra de redécouvrir que ces trajectoires sont elliptiques, et nous noterons également, dans le chapitre 7, que la connaissance de la vitesse de lancement d'un satellite permet aussi d'appréhender la nature de la conique.

Le chapitre 8 vient clore cette première partie par une série de formules et relations complémentaires. Nous sommes dorénavant en mesure de positionner à un instant donné un astre dans le repère centré sur le foyer de sa trajectoire plane ; notre objectif est maintenant de le situer dans d'autres repères appropriés de l'espace : c'est l'objet essentiel de la deuxième partie.

Les repères généralement utilisés par les navigateurs et les astronomes sont précisés aux chapitres 9 et 10. Partant des coordonnées horizontales terrestres, nous définirons ensuite les coordonnées horaires puis équatoriales et écliptiques basées en particulier sur les références du méridien de Greenwich et de l'axe des équinoxes. Ce sera l'occasion d'insister sur les différents temps pouvant intervenir dans ces changements de repères et dans la détermination de l'instant du passage d'un astre.

Le dernier chapitre vise à une meilleure compréhension des éphémérides. Nous établirons par exemple comment, grâce à la connaissance des six variables

elliptiques, nous passons des coordonnées polaires de l'astre ou du satellite artificiel à ses coordonnées équatoriales terrestres.

Pour les étudiants, cet ouvrage permettra d'approfondir le cours de mécanique newtonienne d'un système de points matériels ; il constitue également une introduction à un enseignement d'astronomie. Mais, par l'ensemble des formules qu'il contient, par les exercices entièrement résolus en fin de chaque chapitre – plus de trente, dont certains sont de véritables bureaux d'études nécessitant l'utilisation du tableur –, ce livre devrait intéresser, outre les astronomes et navigateurs, tous ceux, techniciens et ingénieurs, qui auraient à traiter du mouvement et de la localisation des astres, satellites artificiels, sondes spatiales, et que nous appellerons navigateurs de l'espace...

Chapitre 1

Mécanique céleste

Au cours de ce chapitre introductif nous précisons l'espace au sein duquel nous évoluerons et les grandeurs fondamentales sur lesquelles nous nous appuierons. L'espace est notre système solaire, infime élément de notre Galaxie, que nous explorons à l'aide de satellites et de sondes. Toujours à l'échelle planétaire, nous caractérisons, outre la masse, les grandeurs liées au temps et à la durée d'une part et celles relatives aux distances d'autre part.

Pour terminer cette présentation, nous proposons un premier exercice définissant le jour julien correspondant à une date donnée, référence que l'on utilisera largement au dernier chapitre.

Le deuxième exercice porte en particulier sur les périodes synodiques : l'envoi d'une sonde vers Mars par exemple implique une configuration donnée par rapport au Soleil de cette planète avec la Terre (voir exercice E7-3), et il est important de savoir quand se reproduira la configuration identique favorable à un nouveau lancement.

1 Structure cosmique

L'ordonnancement de l'univers est essentiellement dû à la force gravitationnelle qui, pour deux corps en présence, est proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de leur distance. La force d'attraction ou de répulsion d'origine électrostatique n'apparaît pas, car la charge des corps est globalement neutre.

La valeur de la constante gravitationnelle (voir chapitre 6) est :

$$G = 6,672\,59 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2 \text{ (m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{)}$$

déterminée par l'observation, c'est une constante primaire.

La permittivité absolue du vide étant désignée par ϵ_0 , la constante de la formule de Coulomb est :

$$1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

1.1 Notre système solaire

■ *Soleil*

Notre Soleil est une **étoile**, c'est-à-dire un **astre** dont les réactions thermonucléaires internes peuvent s'entretenir, au moins pendant un certain temps. Sa masse a pour valeur :

$$M_s = 1,988\,9 \times 10^{30} \text{ kg}$$

C'est une constante dérivée.



Dans le système d'unités astronomiques, la masse du Soleil est l'unité de base de masse.

Le Soleil est plutôt une petite étoile ; certaines sont quelques dizaines de fois plus lourdes. En dessous d'une masse critique, une étoile ne peut pas naître car son cœur ne peut atteindre les températures nécessaires à l'amorçage de réactions nucléaires.

■ *Planètes*

Par rapport à une étoile, une **planète** est un astre mobile dont la brillance est due à la réflexion de la lumière de l'étoile voisine, le coefficient de réflexion étant l'**albédo**.

Les planètes ont des masses bien inférieures à celles des étoiles. Dans notre système solaire, la plus grosse planète, Jupiter, est 318 fois plus massive que notre Terre pour laquelle :

$$M_T = 5,973\,64 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Jupiter est mille fois plus léger que notre Soleil.

Par rapport à la masse solaire, le **Bureau des longitudes** (voir bibliographie) donne :

$$M_T = 3,003\,489\,6 \times 10^{-6} M_S \quad M_J = 9,545\,942\,9 \times 10^{-4} M_S$$

Les planètes, du mot grec signifiant « vagabond », orbitent autour du Soleil selon des trajectoires faiblement elliptiques, sauf pour la plus proche, Mercure, et la plus lointaine, Pluton. Les ellipses sont décrites à peu près dans un même plan, sauf pour Pluton !

Le plan dans lequel orbite la Terre est appelé **écliptique** car c'est dans ce plan qu'ont lieu les éclipses en relation avec notre planète.

On distingue les planètes inférieures, qui sont plus proches du Soleil que la Terre, et les planètes dites supérieures, qui en sont plus éloignées.

Le classement suivant est plus intéressant :

– en s'éloignant du Soleil, Mercure, Vénus, Terre et Mars forment un groupe d'astres constitués d'un noyau métallique entouré d'un manteau rocheux ; ce sont les **planètes telluriques** ;

– au-delà, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune constituent le groupe des **planètes joviennes** (nom dérivé de Jupiter). Elles sont beaucoup plus volumineuses que les planètes telluriques, mais caractérisées par une plus faible densité due à une fraction importante d'éléments légers, tels que le dihydrogène et l'hélium ; ainsi la surface de ces astres est fluide, et leur limite avec l'atmosphère mal définie.

Ces quatre planètes possèdent des anneaux, mais seul celui de Saturne est spectaculaire. La planète Neptune quant à elle se caractérise par son axe de rotation incliné de 98° par rapport à la perpendiculaire au plan de son orbite, d'où son surnom de « planète couchée ».

Pluton n'est pas une planète jovienne ; précisons qu'une partie de sa trajectoire est plus près du Soleil que celle de Neptune, mais il ne peut y avoir de risque d'interférence vu la forte inclinaison de l'orbite par rapport à l'écliptique ($17,2^\circ$). Notons que la période de révolution de Pluton est $3/2$ de celle de Neptune (respectivement 247,7 et 164,8 années).

■ *Astéroïdes et comètes*

En dessous d'une certaine taille, on parle d'**astéroïdes** et non de planètes : Pluton, d'un diamètre à peine supérieur à 2200 km est une petite planète ;

Cérès, d'un diamètre de 940 km, est le plus gros astéroïde. Actuellement, on connaît les orbites de quelques milliers d'astéroïdes ; la grande majorité de ceux-ci ont des orbites quasiment circulaires confinées entre Mars et Jupiter, qui constituent la **ceinture principale**. Toutefois certaines orbites ont une excentricité notable, faisant que les périhélies peuvent être proches de Mars voire de la Terre... À la différence des planètes parfaitement sphériques, les astéroïdes de petite taille ont tendance à être d'une forme irrégulière.

Bien au delà de l'orbite de Pluton existe un nuage de petits astéroïdes constituant le **nuage de Oort**, du nom de l'astronome qui en fit l'hypothèse. Certains corps quittent ce nuage et adoptent des orbites héliocentriques très elliptiques : ce sont les **comètes**. Elles sont constituées d'un mélange de poussières et de glace. Si la comète s'approche près du soleil, c'est-à-dire dès que l'ordre de grandeur de sa distance est compris entre Mars et Jupiter, son noyau commence à s'évaporer, donnant naissance à une queue spectaculaire dirigée vers l'extérieur de la trajectoire, comme l'avaient noté les Chinois plus de mille ans avant J.-C.

■ *Autres corps*

On considère ici les corps orbitant autour de planètes dont la masse leur est bien supérieure ; on les dénomme **satellites**. On distingue les satellites naturels et les satellites artificiels.

Satellites naturels

Les planètes inférieures n'ont pas de satellites. La Terre possède un seul satellite, la Lune, dont la masse représente environ 1,2 % de celle de notre astre. Les deux satellites de Mars sont minuscules et s'apparentent à des astéroïdes. Sur les 16 satellites de Jupiter, 12 sont petits et ressemblent à des astéroïdes également, mais les quatre autres, découverts par Galilée (1564-1642), ont une dimension et une masse de l'ordre de grandeur de celle de la Lune. Ce sont, en s'éloignant de Jupiter : Io, Europe, Ganymède et Callisto.

Saturne a de nombreux satellites assez petits, sauf Titan qui est plus gros que la Lune. Le satellite Triton a la particularité de tourner autour de Neptune dans le sens rétrograde.

Notre système solaire compte ainsi 16 objets planétaires de diamètre supérieur à 2500 km.

Satellites artificiels

C'est au cours des années 1957-1958 que les premiers satellites artificiels de la Terre commencèrent à peupler notre espace : le 4 octobre 1957, le premier spoutnik fut mis en orbite par les Soviétiques ; entre 1958 et 1959,

les Américains mettent également en orbite une vingtaine de satellites. En l'espace de 25 ans, environ 3000 satellites auront été lancés.

Compte tenu de la traînée atmosphérique et des ceintures de Van Allen constituées de particules chargées piégées par le champ magnétique terrestre, les satellites sont placés de préférence dans les bandes d'altitudes suivantes :

- 700-1500 km pour les orbites basses dites LEO pour *Low Earth Orbit*,
- 5000-15 000 km pour les orbites médianes dites MEO pour *Medium Earth Orbit*,
- > 20 000 km, incluant ainsi l'orbite géostationnaire dite GEO pour *Geostationary Earth Orbit*.

Les télécommunications avec la téléphonie, la télédiffusion, la transmission de données constituent l'application majeure des satellites. L'orbite géostationnaire est largement utilisée, voire saturée, car elle permet entre autres une couverture globale avec seulement trois satellites. Toutefois, considérant par exemple les bilans de liaison ou les délais de transmission, de nombreux systèmes font le choix d'orbites inférieures en s'appuyant sur une **constellation de satellites** à défilement afin d'obtenir la couverture nécessaire : Iridium, en téléphonie mobile, compte 66 satellites à 780 km d'altitude ; le système de localisation GPS (pour *Global Positioning System*) comporte pour le secteur spatial 24 satellites évoluant dans six plans orbitaux à une altitude de 20 200 km.

1.2 Galaxies

■ Notre Galaxie

Les **galaxies** sont principalement constituées d'une concentration d'étoiles dont l'origine est la force gravitationnelle. Le nombre d'astres ainsi rassemblés peut atteindre plusieurs centaines de milliards.

On distingue trois principaux groupes de galaxies : les galaxies irrégulières, les galaxies elliptiques et les **galaxies spirales**. Ces dernières sont les plus nombreuses et notre Galaxie, qui compte environ cent milliards d'étoiles, est de ce type.

Vue de face, la Galaxie a la forme d'un disque où les étoiles sont concentrées essentiellement au centre ainsi que dans quatre bras spiraux. Le Soleil est dans le bras d'Orion, considéré comme une ramification, ou plutôt une protubérance du bras du Sagittaire.

Le disque a une certaine épaisseur, et, observée par la tranche, la Galaxie montre un renflement symétrique au centre appelé **bulbe** ; d'autre part, elle est vue sur la voûte céleste comme une bande ou traînée laiteuse, d'où elle tire son nom de **Voie lactée**.

L'ensemble des étoiles de ce disque orbitent autour du renflement central. Par exemple, le Soleil met près de 250 millions d'années pour effectuer une rotation complète ; compte tenu de la distance au centre, la vitesse tangentielle est élevée et estimée à plus de 200 km/s.

On observe ainsi que les étoiles locales se dirigent vers la constellation du Cygne, et plus précisément, le Soleil apparaît se diriger vers un point appelé **Apex** en direction de l'étoile Véga.

La Voie lactée est entourée d'un « halo galactique » constitué de plus d'une centaine de petits amas d'étoiles appelés **amas globulaires**, comme l'amas M13 dans la constellation d'Hercule.

L'Américain Harlow Shapley établit en 1920 que les amas globulaires étaient répartis à l'intérieur d'une sphère dont le centre était précisément celui de la Galaxie : il est situé à environ 26 000 al du Soleil dans la direction de la constellation du Sagittaire.

La figure 1.1 suivante représente un schéma simplifié de notre Galaxie.

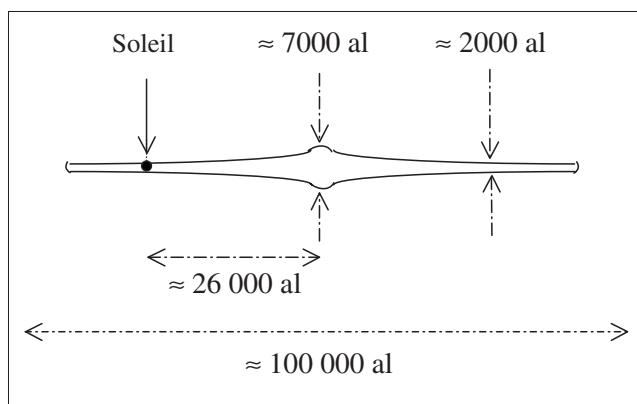


Figure 1.1 Schéma de notre galaxie vue par la tranche.

■ Amas galactiques

Dans l'univers, les galaxies sont en général groupées en amas, dits **amas galactiques**, de plusieurs milliers d'éléments. La Voie lactée appartient à un petit amas galactique appelé **Groupe local**. Ses plus proches voisines sont deux petites galaxies satellites, appelées le Petit Nuage de Magellan et le Grand Nuage de Magellan. Un peu plus loin, à deux millions d'années-lumière (voir paragraphe 3), on rencontre la galaxie d'Andromède (M31) très semblable à notre Voie lactée, ainsi qu'une autre galaxie spirale, M33. Généralement, les galaxies sont uniquement identifiées par un numéro dans le catalogue d'astronomie où elles sont répertoriées.

2 Durées

Dans le Système international d'unités (SI), la seconde est l'unité de base de la grandeur temps. Sa définition, donnée par le Bureau international des poids et mesures (BIPM), est la suivante :

« La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. »

2.1 Jours et années

■ Les différents jours

Jour sidéral

C'est le temps mis par un astre, planète ou satellite par exemple, pour effectuer une **rotation** complète autour de son axe et donc reprendre la même orientation par rapport à des étoiles lointaines.

Pour la Terre, la durée du jour sidéral est :

$$J_{\text{Sid}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,0956 \text{ s} = 86\,164,0956 \text{ s}$$

Pour Jupiter la rotation est la plus rapide, et la durée du jour sidéral est de 9 h 50 min 30 s pour ce qui est de la rotation de l'atmosphère à l'équateur et de 9 h 55 min 30 s pour la rotation du champ magnétique.

Vénus, la plus lente, effectue sa rotation en 243 jours environ.

Mars a une période de rotation voisine de celle de la Terre, soit 24 h 37 min 22,6632 s.

Lorsque l'on observe les planètes au-dessus de l'écliptique, on note que les rotations de Vénus et Pluton s'effectuent dans le **sens rétrograde**, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre.

Jour solaire

C'est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du Soleil au méridien du lieu d'observation (voir figure 9.6), c'est-à-dire l'intervalle entre deux culminations (Soleil au plus haut).

Durant un jour solaire, la Terre effectue donc une rotation complète, plus une rotation d'angle θ , conformément à la figure 1.2 : cet angle correspond au déplacement orbital.

On suppose l'orbite terrestre circulaire ; sachant que les 360° sont décrits en 365,256 jours environ, la valeur de l'angle est donc de $0,9856^\circ$.

Le temps ΔJ mis par la Terre pour tourner de θ est :

$$\Delta J = (J_{\text{Sid}} / 360^\circ) \times 0,9856^\circ = 236 \text{ s}$$

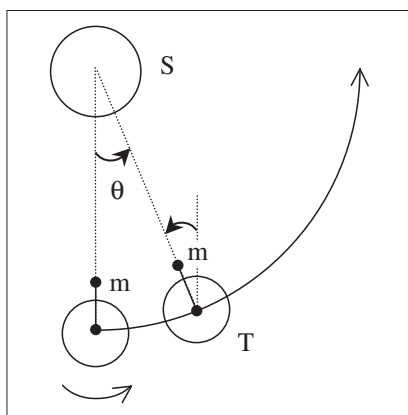


Figure 1.2 Déplacement orbital durant un jour solaire.

Si l'on veut que le plan du méridien choisi au départ contienne toujours le Soleil à l'arrivée, il faudra donc patienter de 4 minutes moins 4 secondes par rapport à la durée du jour sidéral.

Notons que la valeur de la vitesse angulaire de la Terre correspond à celle de l'angle θ puisque celui-ci est décrit en un jour solaire. Cette vitesse angulaire est la **constante de Gauss** qui est maintenant une constante de définition dont la valeur arbitraire est :

$$k = 0,985\,607\,668\,601\,425 \text{ degré/jour} = 0,017\,202\,098\,95 \text{ radian/jour}$$

Le jour solaire correspond au temps écoulé entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien du lieu :

$$J_{\text{Sol}} = J_{\text{Sid}} + \Delta J \approx 24 \text{ h}$$

Par définition, l'heure est la 24^e partie du jour solaire moyen, calculé sur une année ; le jour solaire varie à cause de la trajectoire qui est en réalité elliptique.

De fait, le jour se substitue au jour solaire moyen et vaut 86 400 secondes telles que définies dans le SI :

$$1 \text{ jour} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$$



Dans le système d'unités astronomiques, le jour est l'unité de base du temps.

On peut calculer directement le jour sidéral en fonction du jour solaire, en notant qu'une année sidérale (voir suite de ce paragraphe) correspond à

365,2564 jours solaires et à 366,2564 jours sidéraux, puisqu'il faut dans ce dernier cas ajouter la rotation supplémentaire de notre planète ; d'où :

$$366,2564 \times J_{\text{Sid}} = 365,2564 \times J_{\text{Sol}}$$

Confondant le jour solaire avec un jour solaire moyen de 86 400 s, on en déduit que :

$$J_{\text{Sid}} \approx 86\,164,1 \text{ s}$$

Ajoutons enfin que les jours solaires augmentent d'environ 0,00164 seconde/siècle du fait du ralentissement de la rotation terrestre, affectée par les marées lunaires.

■ Les différentes années

Les Anciens croyaient que les étoiles étaient sur une sphère, la **sphère céleste**, dont la Terre était fixe au centre. L'intersection de l'équateur avec cette sphère donne l'**équateur céleste**. L'**écliptique**, plan de la trajectoire du Soleil dans ce référentiel géocentrique, est incliné de 23° et coupe l'équateur céleste en deux points. Le Soleil montant rencontre le premier point, appelé **point vernal** ou **point gamma**, le 21 mars, date de l'équinoxe de printemps ; c'est-à-dire lorsque la durée du jour est égale à celle de la nuit (la date pouvant changer selon l'année).

Plus précisément, l'**obliquité** de l'écliptique au 1^{er} janvier 2000 à 12 h TU (origine des temps J2000) est de $23^\circ 26' 21'',4119$.

Année sidérale

L'année sidérale T_{Sid} correspond au temps T_{T} mis par notre planète pour accomplir une **révolution** complète autour du Soleil et donc revenir à la même position par rapport à des étoiles lointaines :

$$T_{\text{Sid}} = T_{\text{T}} = 365,2564 \text{ j} = 365 \text{ j } 6 \text{ h } 9 \text{ min } 12,96 \text{ s} = 31\,558\,152,96 \text{ s}$$

Année tropique

L'axe de rotation de la Terre est incliné de 23° par rapport à la perpendiculaire à l'écliptique ; il n'est pas pour autant fixe par rapport aux étoiles : il décrit, dans le sens rétrograde, un cône de demi-angle 23° . La période de cette précession est légèrement inférieure à 26 000 ans (on retient plutôt 25 800 ans). Solstices et équinoxes vont donc dériver avec la même période : c'est le phénomène dit de **précession des équinoxes**.

Si on veut que l'année sidérale représente le cycle des saisons, il faut la corriger de la précession ; on obtient alors l'année tropique. La révolution et la précession étant de sens opposés, la correction annuelle de 365,2564/26 000 jours est négative :

$$T_{\text{Tro}} = T_{\text{Sid}} - 0,014 2 = 365,242 2 \text{ j}$$

Ajoutons que la précession des équinoxes fait que le point gamma (γ) dérive vers l'ouest d'environ 50'' par an ($360^\circ / 26\,000$ ans).

L'intersection de l'axe des pôles avec la voûte céleste donne le pôle Nord céleste, actuellement très proche de l'étoile Polaris qui apparaît donc fixe. C'est Véga qui dans 12 000 ans sera notre **Étoile polaire** !

Année julienne, calendriers julien et grégorien

L'année julienne a été fixée à 365 j $\frac{1}{4}$ lors de la réforme du calendrier demandée par Jules César en 45 avant J.-C.

C'est maintenant un multiple de l'unité astronomique de temps, le jour ; c'est donc une unité auxiliaire :

$$1 \text{ année julienne} = 365,25 \text{ j} = 31\,557\,600 \text{ s}$$

L'année commençait le 1^{er} mars et se terminait le 28 février. Elle comprenait 4 mois de 30 jours, 7 mois de 31 jours et un mois de 28 jours . Cela ne faisait que 365 jours, aussi il fut décidé d'ajouter au mois de février un jour tous les quatre ans : les années bissextiles, c'est-à-dire divisibles par 4, ont donc 366 jours.

Le calendrier julien ainsi défini s'appuyait sur une année supérieure à l'année tropique et générait une dérive de la date de retour des saisons : il fallait retirer à l'année julienne un jour tous les 128 ans.

Le pape Grégoire XIII commanda une réforme du calendrier en 1582 :

- le calendrier julien se termina le 4 octobre et fut remplacé le lendemain 15 octobre par le calendrier grégorien ;
- dans ce nouveau calendrier, certaines années bissextiles sont supprimées (1700, 1800, 1900, 2100, ...) ; mais 1600, 2000, 2400, qui sont multiples de 400, restent bissextiles.

On conclut que l'année grégorienne moyenne est de $(365,25 - 3/400)$ j, soit :

$$\text{année grégorienne} = 365,2425 \text{ j}$$

Il est à noter que le calendrier grégorien n'a pas été mis en place partout à la même époque !

2.2 Périodes

■ Périodes synodique et sidérale

- La **période synodique** correspond au temps de réapparition d'une même configuration de deux planètes par rapport au Soleil.

Les configurations caractéristiques sont :

- la **conjonction**, lorsque les deux planètes sont alignées avec le Soleil d'un même côté ;
- l'**opposition**, lorsque les deux planètes sont de part et d'autre alignées avec le Soleil ;
- la **quadrature**, lorsque les directions des planètes avec le Soleil forment un angle droit.
- La **période sidérale** est le temps T_p mis par une planète quelconque pour accomplir une révolution complète autour du Soleil par rapport à un observateur lié aux étoiles fixes. Elle correspond à l'année sidérale pour la planète Terre.

■ Relation entre les deux périodes

Considérons par exemple la conjonction de la Terre de période T_T et d'une planète plus éloignée que celle-ci du Soleil, planète dite supérieure, dont la période T_{Ps} est inconnue.

Les données sont :

- l'angle θ entre les deux alignements successifs,
- le temps écoulé entre les deux configurations, c'est-à-dire la période synodique S_{Ps} .

Les orbites sont supposées circulaires.

Pour la planète P_s la relation entre sa période synodique et sa période sidérale est :

$$S_{Ps} = \frac{T_{Ps}}{360^\circ} \theta \rightarrow \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{S_{Ps}}{T_{Ps}}$$

Pendant la durée S_{Ps} la Terre a parcouru une révolution supplémentaire en plus de θ ; d'où :

$$S_{Ps} = \frac{T_T}{360^\circ} (360^\circ + \theta) \rightarrow S_{Ps} - T_T = T_T \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{T_T S_{Ps}}{T_{Ps}}$$

Après division par $T_T S_{Ps}$, on déduit la relation permettant de calculer par exemple la période sidérale.

Pour une planète supérieure :

$$\frac{1}{T_{Ps}} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{S_{Ps}}$$

Pour une planète inférieure :

- T_T remplace T_{Ps} ,
- T_{Pi} remplace T_T , d'où :

$$\frac{1}{T_{Pi}} = \frac{1}{T_T} + \frac{1}{S_{Pi}}$$

À la figure 1.3 ci-dessous, on a représenté la conjonction d'une planète supérieure avec la Terre.

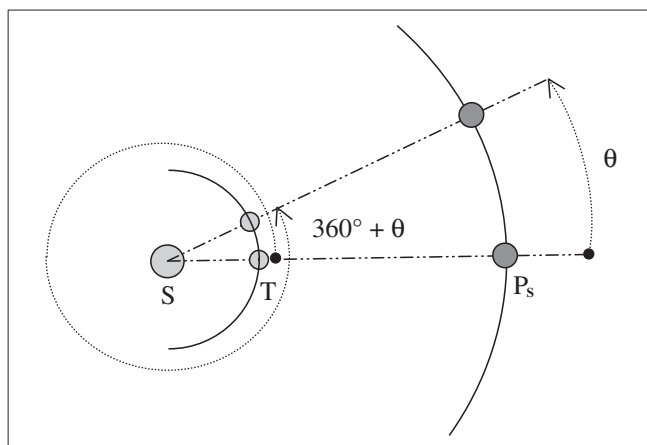


Figure 1.3 Période synodique de la conjonction de deux planètes.

➤ Remarque

Un autre raisonnement consiste à considérer les vitesses de chacune des planètes :

- La vitesse de la planète supérieure est de $360/T_{Ps}$ degrés par jour ; pendant la période synodique S_{Ps} le nombre de degrés décrit est

$$\theta = \frac{360^\circ}{T_{Ps}} S_{Ps} \rightarrow \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{S_{Ps}}{T_{Ps}}$$

- La vitesse de la Terre est de $360/T_T$ degrés par jour ; pendant la même durée S_{Ps} le nombre de degrés décrit est

$$\theta + 360^\circ = \frac{360^\circ}{T_T} S_{Ps} \rightarrow \frac{S_{Ps}}{T_{Ps}} + 1 = \frac{S_{Ps}}{T_T}$$

Divisant par la période synodique, il vient :

$$\frac{1}{T_{Ps}} + \frac{1}{S_{Ps}} = \frac{1}{T_T}$$

On retrouve la relation valable pour les planètes supérieures.

3 Distances

En préliminaire, rappelons que l'unité de longueur a été définie comme suit lors de la 17^e Conférence générale des poids et mesures en 1983 :

« Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde. »

La vitesse de la lumière est ainsi devenue une constante de définition dont la valeur est :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

3.1 Unité astronomique

- La circonférence terrestre et par conséquent son diamètre furent déterminés très tôt et avec une assez bonne précision pour l'époque.

Ératosthène, en l'an 200 avant J.-C., calcula que la circonférence était de 42 000 km en utilisant la méthode suivante :

Les rayons du Soleil étant parallèles, s'ils arrivent verticalement en un lieu et si l'on mesure simultanément l'angle qu'ils font avec la verticale en un autre lieu sur le même méridien, alors, connaissant la distance entre les deux sites, la circonférence s'en déduit facilement.

Le premier lieu était Syène au sud de l'Égypte, où les rayons solaires au solstice d'été à midi parvenaient à éclairer le fond d'un puits profond ; le deuxième lieu était Alexandrie où, connaissant la hauteur d'un obélisque et son ombre portée, Ératosthène en déduisit que l'angle était de 7 degrés.

La distance entre les deux citées étant de 820 km, il détermina que la circonférence était de $(820/7) \times 360$ km, d'où un diamètre de 13 400 km...

La valeur actuellement retenue pour le rayon équatorial de la Terre est de 6 378,14 km, d'où le diamètre :

$$D_T = 12\,756,28 \text{ km}$$

On calculera à l'exercice E7-1 (chapitre 7) que la distance à la surface terrestre d'un satellite en orbite géostationnaire est, exprimée en diamètres terrestres :

$$H_{\text{sat}} = 2,806 D_T$$

- C'est Hipparque qui, avec une très bonne précision également, détermina la distance Terre-Lune. La méthode qu'il utilisa s'appuyait sur la durée de l'éclipse de Lune la plus longue, soit 2 h 30 min, et la connaissance du mois synodique, soit 29,5 j. Avec ces données, il en déduisit que la distance entre les centres des deux astres était de 32,5 diamètres.

La figure 1.4 donne la géométrie et les instants de l'éclipse du 16 mai 2003.

La distance Terre-Lune moyenne (demi-grand axe) est évaluée actuellement à 383 398 km, soit environ 30,06 diamètres terrestres.

La distance correspondante entre les deux sols, sachant que le rayon lunaire est de 1 737,4 km, correspond à 29,42 diamètres.

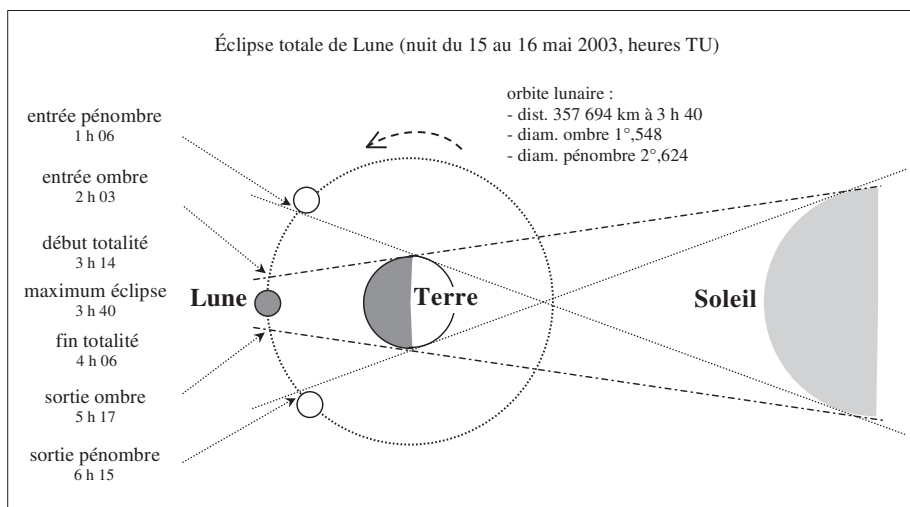


Figure 1.4 Distance Terre-Lune déduite de l'éclipse de Lune.

- Les Anciens avaient conscience qu'ils ne savaient pas déterminer correctement la distance Terre-Soleil ; c'est pourquoi ils évaluèrent les distances des autres planètes en fonction de cette distance qui servit d'étalon et fut baptisée **unité astronomique** (symbole ua).

Ainsi par exemple Kepler, en exploitant les mesures de Tiko Brahé, détermina point par point la trajectoire de Mars en donnant une échelle arbitraire pour la distance de la Terre au Soleil. Dans sa construction, il traçait la trajectoire terrestre et reportait des couples de lignes de visée de Mars obtenues à partir d'une position initiale de notre planète et de celle déterminée après une révolution sidérale de Mars, soit 1,88 ans. Il obtint point par point la trajectoire de Mars et s'aperçut qu'elle était elliptique avec une distance moyenne au Soleil de 1,5 ua.

Ce n'est que vers la fin du XVII^e siècle que l'on commença à déterminer d'une manière satisfaisante la valeur de l'unité astronomique.

En nous appuyant sur la troisième loi de Kepler démontrée au chapitre 6, nous pouvons écrire que la distance moyenne Terre-Soleil, a_T a pour expression :

$$a_T = (1/k)^{2/3} (GM_s)^{1/3}$$

Les valeurs de la constante de Gauss et du produit de la constante gravitationnelle par la masse du Soleil étant données, on en déduit la valeur de l'unité astronomique :

$$1 \text{ ua} = 149,597\,870\,61 \times 10^9 \text{ m}$$



Dans le système d'unités astronomiques, l'unité astronomique est l'unité de base de longueur.

L'unité astronomique étant ainsi calculée, on conçoit que la distance moyenne Terre-Soleil réelle puisse s'en écarter légèrement, puisque la période sidérale T_{Sid} ne peut être rigoureusement égale à la « période gaussienne » de $2\pi/k$.

Cette unité est bien adaptée à notre système solaire comme le montre le tableau suivant :

Planète	Demi-grand axe (ua)
Mercure	0,387 098
Vénus	0,723 330
Terre	1,000 001
Mars	1,523 679
Jupiter	5,202 603
Saturne	9,554 909
Uranus	19,218 446
Neptune	30,110 387

La distance moyenne de Pluton au Soleil est de 39,44 ua ; mais il peut s'en éloigner jusqu'à 49,22 ua.

Le nuage de Oort qui marque la limite de notre système solaire est situé à environ 50 000 ua, et l'étoile la plus proche du Soleil, Alpha du Centaure, est 5,3 fois plus éloignée.

3.2 Année-lumière et parsec

• Nous avons donné dans l'introduction au paragraphe 3 la valeur de la vitesse c de la lumière. Ainsi, la distance des deux astres et les rayons de ceux-ci étant connus, la lumière provenant d'une source placée sur la Lune mettrait pour nous parvenir :

$$(383\,398\text{ km} - 6378\text{ km} - 1734\text{ km}) / (299\,792\text{ km.s}^{-1}) \approx 1,252\text{ s}$$

Introduisant la seconde-lumière (sl), c'est-à-dire la distance parcourue par la lumière pendant une seconde, on pourra dire que la Lune est à un peu plus de une seconde-lumière de la Terre.

Quant à la Terre, elle est à environ 500 sl du Soleil, ou encore, en minutes-lumière (minl), à environ 8,3 minl.

Les confins du système solaire sont à 25×10^6 sl.

Pour de telles distances, c'est l'**année-lumière** (al) qui est l'unité la mieux adaptée. L'année-lumière est la distance parcourue dans le vide par la lumière durant une année julienne :

$$1 \text{ al} = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1} \times 31\,557\,600 \text{ s}$$

soit :

$$1 \text{ al} = 9,460\,730\,473 \times 10^{15} \text{ m}$$

La correspondance avec l'unité astronomique est :

$$1 \text{ al} = 63\,241,077 \text{ ua}$$

Ainsi, notre système solaire a un rayon de 0,8 al, et Alpha du Centaure est à 4,22 al du Soleil.

Le Soleil, lui, est à 26 000 al du centre de notre Galaxie ; laquelle a un diamètre d'environ 100 000 al.

À l'échelle de l'univers, les distances peuvent atteindre des milliards d'années-lumière ; on les exprime alors en giga années-lumière (Gal).

- Les astronomes qui cherchaient à mesurer la distance des étoiles proches ont introduit une autre unité, le **parsec** (pc), dont nous allons déterminer la correspondance avec l'année-lumière.

L'étoile proche est repérée par rapport aux étoiles lointaines à partir de deux positions de la Terre diamétralement opposées au Soleil comme indiqué à la figure 1.5.

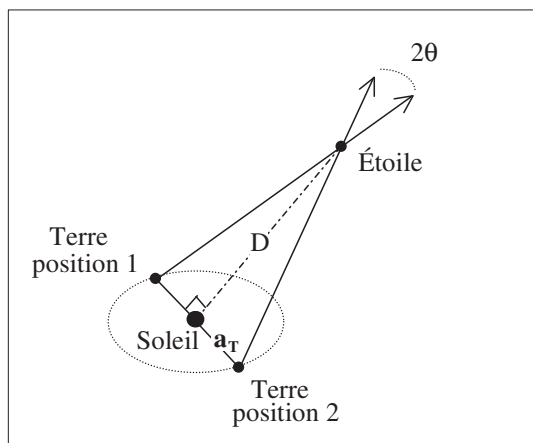


Figure 1.5 Parallaxe annuelle d'une étoile proche.

Les deux droites de visée obtenues font un angle 2θ tel que :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_T}{D} \quad (D \text{ étant la distance de l'étoile}).$$

θ représente la **parallaxe annuelle** de l'étoile ; sa faible valeur permet d'écrire :

$$D = \frac{a_T}{\theta} \quad \text{avec} \quad a_T = 1,000\,001\,017\,8 \text{ ua}$$

Si la parallaxe est exprimée en degrés, $\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180} \theta(\text{d}^\circ)$.

La parallaxe se mesure généralement en secondes d'arc, d'où :

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180} \frac{1}{3600} \theta(")$$

La distance de l'étoile, en unités astronomiques ou en années-lumière, a pour expression :

$$D(\text{ua}) = \frac{2,062\,648\,1\,10^5}{\theta(")}$$

$$D(\text{al}) = \frac{3,261\,563\,8}{\theta(")}$$

On pose :

$$1 \text{ pc} = 3,261\,563\,8 \text{ al}$$

Il vient

$$D(\text{pc}) = \frac{1}{\theta(")}$$

Ainsi, le parsec est la distance d'une étoile dont la parallaxe annuelle est de une seconde d'arc.

On avait précisé que Alpha du Centaure était à 4,22 al du Soleil, ce qui correspond donc à 1,29 pc soit une parallaxe de $0'',77$.

La distance correspondant à $0'',05$ est de 20 pc, soit environ 65 al : on dénombre un millier d'étoiles à l'intérieur de la sphère ainsi définie.

exercices

E1-1 Jour Julien

Le **jour julien** (JJ) est le nombre de jours écoulés depuis le 1^{er} janvier 4712 avant J.-C. à 12h TU. On peut calculer le JJ correspondant à une date donnée à l'aide de la formule suivante :

$$JJ = P.E.[365,25 \times (A + 4716)] + P.E.[30,6001 \times (M + 1)] + J + B + T - 1524,5$$

P.E. = Partie Entière

J, M, A = date (*J* jour du mois, *M* numéro du mois, *A* année)

– Si *M* = 1 ou 2, on remplace *A* par *A* - 1 et *M* par *M* + 12

– Si *J, M, A* est une date du calendrier julien, *B* = 0

– Si *J, M, A* est une date du calendrier grégorien, $B = 2 - C + P.E.[C/4]$,
où $C = P.E.[A/100]$

L'heure UTC (ou TU) est exprimée sous la forme HH MM SS, et

$$T = HH/24 + MM/1440 + SS/86400$$

On définit également le **jour julien modifié** (JJM ou MJD pour Modified Julian Day) qui se déduit du JJ en retranchant 2 400 000,5 j.

1. Calculer le JJ correspondant aux dates suivantes :

1^{er} janvier an 0 12h TU ; 15 octobre 1582 0h TU ; 4 septembre 1983 0h TU

2. Calculer le JJ correspondant aux 1^{er} janvier 1001 et 2001 à 0h TU, justifier la différence par rapport à l'année de 365,25 j.

3. À quelle date correspond 2 400 000,5 JJ ?

4. Calculer le JJ et le MJD à la date du 28 février 2003 à 23 h 59 min 59,9 s TU.

solutions

1. 1^{er} janvier an 0, 12 h TU → 1 721 058 JJ

15 octobre 1582, 0 h TU → 2 299 160,5 JJ

4 septembre 1983, 0 h TU → 2 445 581,5 JJ

2. 1^{er} janvier 1001, 0 h TU → 2 086 673,5 JJ

1^{er} janvier 2001, 0 h TU → 2 451 910,5 JJ

La différence est de 365 237 jours.

L'année de 365,25 j conduit à 365 250 jours auxquels il faut retrancher 10 j dus au changement de calendrier et 3 j pour les années 1700, 1800 et 1900 qui ne sont pas comptées comme bissextiles.

3. 2 400 000,5 JJ correspond au 17 novembre 1858 à 0h TU

4. 28 février 2003 à 23 h 59 min 59,9 s TU : 2 452 699,5 JJ soit 52 699 MJD .

À partir du 1^{er} janvier 2001, on a bien rajouté :
 $(365 \times 2 + 31 + 28) = 789$ jours !

➤ **Remarque**

- L'époque **J2000,0** , c'est-à-dire la date référence du 1^{er} janvier 2000 à 0 h TU correspond à 2 451 544,5 JJ.
- L'époque **J2000** , c'est-à-dire la date référence du 1^{er} janvier 2000 à 12 h TU correspond à 2 451 545,0 JJ.

E1-2 Périodes des planètes

1. Périodes synodiques pour un observateur terrestre

a) Compléter le tableau ci-dessous afin d'obtenir les périodes sidérales ou synodiques des planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

Planète	période sidérale		pér. synodique
	années	jours	jours
Mercure			115,9
Vénus		224,7	
Terre	1,0000	365,2564	-----
Mars		687	
Jupiter			398,88
Saturne			378,09
Uranus		30 689	
Neptune		60 182	

b) Les deux prochains passages de Mercure devant le Soleil se traduisant par une éclipse observable de la Terre ont lieu le 07/05/2003 à 7 h 52 min 37 s et le 08/11/2006 à 21 h 40 min 53 s. Pour Vénus, les dates sont le 08/06/2004 à 8 h 19 min 44 s et le 06/06/2012 à 1 h 19 min 24 s.

Calculer pour chaque planète le nombre de jours séparant les passages ; conclure.

2. Périodes synodiques par rapport à Jupiter

Déterminer les périodes synodiques de Mars et Saturne pour un observateur lié à Jupiter.

3. Mois synodique

La lune effectue sa révolution autour de la Terre en 27,3217 jours : c'est le **mois sidéral**. Pendant cette révolution, notre planète tourne autour du Soleil

et par conséquent la configuration initiale aura changé. Déterminer en deux itérations la correction à ajouter au mois sidéral afin de retrouver la même configuration. Donner l'expression exacte du **mois synodique**, et sa valeur.

solutions

1.

a)

Planète	période sidérale		pér. synodique
	années	jours	jours
Mercure	0,2409	88	115,9
Vénus	0,6152	224,7	583,9
Terre	1,0000	365,2564	-----
Mars	1,8809	687	779,9
Jupiter	11,8631	4 333	398,88
Saturne	29,4593	10 760	378,09
Uranus	84,0219	30 689	369,66
Neptune	164,7693	60 182	367,49

b)

– Pour Mercure, le nombre de jours séparant les deux passages est donné par la différence des dates exprimées en jours juliens :

$$2\,454\,048,403\text{ JJ} - 2\,452\,766,828\text{ JJ} \text{ soit } 1281,575 \text{ jours}.$$

Compte tenu de la période synodique de 115,9 jours, cela correspond à la onzième conjonction, et à 14,5 périodes de rotation de Mercure, et 3,5 de la Terre.

Mercure a bien effectué 11 rotations de plus que la Terre.

– On calcule de même pour Vénus :

$$2\,456\,084,555\text{ JJ} - 2\,453\,164,847\text{ JJ} \text{ soit } 2919,708 \text{ jours}.$$

Compte tenu de la période synodique de 583,9 jours, cela correspond à la cinquième conjonction et à 13 périodes de rotation de Vénus, et 8 de la Terre. Vénus a bien effectué 5 rotations de plus que la Terre.

2.

Par rapport à Jupiter, Mars est une planète inférieure. La formule se note :

$$\frac{1}{S_M} = \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_J} \quad S_M = 816,45 \text{ j} = 2,235 \text{ années}$$

Par rapport à Jupiter, Saturne est une planète supérieure. La formule se note :

$$\frac{1}{S_S} = \frac{1}{T_J} - \frac{1}{T_S} \quad S_S = 7254,3 \text{ j} = 19,861 \text{ années}$$

3.

- Supposons, pour illustrer, qu'au départ on ait l'alignement Soleil-Terre-Lune ; après un mois sidéral T_L il faudra encore attendre quelques jours pour arriver à la pleine Lune car la Terre aura tourné autour du Soleil de :

$$360^\circ \frac{T_L}{T_T} = 26^\circ,9285$$

La Lune a parcouru 360° en T_L jours ; les $26^\circ,9285$ seront parcourus en :

$$\frac{T_L}{360^\circ} \times 360^\circ \frac{T_L}{T_T} = \frac{T_L^2}{T_T} = 2,0437 \text{ j}$$

- Effectuons la deuxième itération :

Pendant ces 2,0437 j la Terre s'est déplacée de :

$$\frac{360^\circ}{T_T} \times \frac{T_L^2}{T_T} = 360^\circ \frac{T_L^2}{T_T^2} = 2^\circ,0143$$

Pour parcourir ces $2^\circ,0143$, la Lune mettra le temps supplémentaire :

$$\frac{T_L}{360^\circ} \times 360^\circ \frac{T_L^2}{T_T^2} = \frac{T_L^3}{T_T^2} = 0,1529 \text{ j}$$

Correction à ajouter :

$$\Delta T_L = 2,1966 \text{ j}$$

- Ainsi après deux itérations, la valeur du mois synodique est :

$$S_{L2} = T_L + \frac{T_L^2}{T_T} + \frac{T_L^3}{T_T^2} ; \text{ soit } S_{L2} = 29,5183 \text{ j}$$

$$S_L = T_L \left[1 + \frac{T_L}{T_T} + \frac{T_L^2}{T_T^2} + \frac{T_L^3}{T_T^3} + \dots \right]$$

La raison de cette progression géométrique est inférieure à l'unité, d'où :

$$S_L = T_L \frac{1}{1 - \frac{T_L}{T_T}} = \frac{1}{\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_T}}$$

$$S_L = 29,5306 \text{ j}$$

On note que la convergence est très rapide.

➤ Remarques

1- Phases de la Lune et lunaisons

- L'alignement Soleil-Terre-Lune correspond à la pleine lune (PL) ; la nouvelle lune (NL) correspond à l'alignement Soleil-Lune-Terre. À partir de cette dernière, les phases intermédiaires sont le premier croissant, le premier quartier (PQ), la lune gibbeuse croissante ; puis après la pleine lune,

la lune gibbeuse décroissante, le dernier quartier et le dernier croissant.
Le mois synodique, ou mois lunaire ou encore lunaison, correspond à l'intervalle de temps séparant deux pleines lunes ou deux nouvelles lunes consécutives ; sa valeur est en moyenne égale à 29 j 12 h 44 min 2,9 s, soit 29,530 589 j.

Le tableau suivant fait apparaître les variations de la lunaison, comptées entre deux pleines lunes, pour l'année 2004 :

Pleine lune		Mois lunaire		Pleine lune		Mois lunaire	
Date	heure TU	j, h, min	jours	Date	heure TU	j, h, min	jours
07/01	15 h 40 min			02/07	11 h 09 min		
		29 j 17 h 07 min	29,7132			29 j 06 h 56 min	29,2889
06/02	08 h 47 min			31/07	18 h 05 min		
		29 j 14 h 27 min	29,6021			29 j 08 h 17 min	29,3451
06/03	23 h 14 min			30/08	02 h 22 min		
		29 j 11 h 49 min	29,4924			29 j 10 h 47 min	29,4493
05/04	11 h 03 min			28/09	13 h 09 min		
		29 j 09 h 30 min	29,3958			29 j 13 h 58 min	29,5819
04/05	20 h 33 min			28/10	03 h 07 min		
		29 j 07 h 47 min	29,3243			29 j 17 h 00 min	29,7083
03/06	04 h 20 min			26/11	20 h 07 min		
		29 j 06 h 49 min	29,2840			29 j 18 h 59 min	29,7910
02/07	11 h 09 min			26/12	15 h 06 min		

On déduit que sur l'année 2004 la valeur moyenne des 12 lunaisons comptées à partir de la pleine lune est de 29,4980 j. Dans le tableau ci-dessous, les lunaisons sont cette fois calculées entre deux nouvelles lunes consécutives et la valeur moyenne est de 29,5621 j !

Nouvelle lune		Mois lunaire		Nouvelle lune		Mois lunaire	
Date	heure TU	j, h, min	jours	Date	heure TU	j, h, min	jours
21/01	21 h 05 min			17/07	11 h 24 min		
		29 j 12 h 13 min	29,5090			29 j 14 h 00 min	29,5833
20/02	09 h 18 min			16/08	01 h 24 min		
		29 j 13 h 23 min	29,5576			29 j 13 h 05 min	29,5451
20/03	22 h 41 min			14/09	14 h 29 min		
		29 j 14 h 40 min	29,6111			29 j 12 h 19 min	29,5132
19/04	13 h 21 min			14/10	02 h 48 min		
		29 j 15 h 31 min	29,6465			29 j 11 h 39 min	29,4854
19/05	04 h 52 min			12/11	14 h 27 min		
		29 j 15 h 35 min	29,6493			29 j 11 h 02 min	29,4597
17/06	20 h 27 min			12/12	01 h 29 min		
		29 j 14 h 57 min	29,6229				
17/07	11 h 24 min						

La moyenne globale ressort cependant à 29,5301 j.

Depuis 1923, les mois lunaires, que l'on fait commencer à la nouvelle lune, sont numérotés.

2– Autres mois

Ils correspondent à des périodes de révolutions moyennes.

Le mois synodique, le plus long, a été défini en choisissant la phase comme référence. Par rapport à d'autres références, on obtient :

- Le **mois anomalistique**, compté entre deux passages consécutifs de la Lune au périégée, et dont la durée est de 27,554 550 j, soit 27 j 13 h 18 min 33,1 s.

- Le **mois draconitique**, compté entre deux passages consécutifs de la Lune au nœud ascendant (voir chapitre 11), c'est-à-dire lorsque le satellite naturel traverse l'écliptique vers le Nord. Le nœud ascendant reculant de $19,341\,362^\circ/\text{an}$, le mois draconitique est le plus court ; sa durée étant de 27,212 221 j, soit 27 j 05 h 05 min 35,9 s.

- Le **mois tropique**, basé sur l'équinoxe et non plus sur la position par rapport aux étoiles. Le recul du point γ fait que la durée de ce mois est légèrement inférieure à celle du mois sidéral.

La durée du mois tropique est de 27,321 582 j soit 27 j 07 h 43 min 04,7 s ; celle du **mois sidéral** est de 27,321 662 j soit 27 j 07 h 43 min 11,6 s.

Chapitre 2

Rappels sur les coniques

Les trajectoires des astres et satellites artificiels sont de nature elliptique, circulaire ou hyperbolique. Ce chapitre est donc consacré à l'étude des caractéristiques des coniques, qui nous seront utiles par la suite. Les relations entre représentations polaires et cartésiennes sont précisées et nous avons insisté sur l'évolution des paramètres en fonction de l'excentricité.

Un premier exercice donne un certain nombre de dimensions caractérisant l'ellipse en fonction du demi-grand axe et de l'excentricité, et on en déduit par exemple que la différence entre le grand axe et le petit axe de notre planète est pratiquement égale à son périmètre !

Un second exercice permet d'obtenir une équation cartésienne commune des coniques en fonction du paramètre et de l'excentricité.

1 Définition par foyer et directrice

Une **conique** est l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que le rapport des distances à un point fixe, le **foyer** F , et à une droite fixe, la **directrice** (D) , est constant. H étant la projection de M sur (D) , on a :

$$\frac{MF}{MH} = e \text{ (e est l'excentricité).}$$

1.1 Équation cartésienne

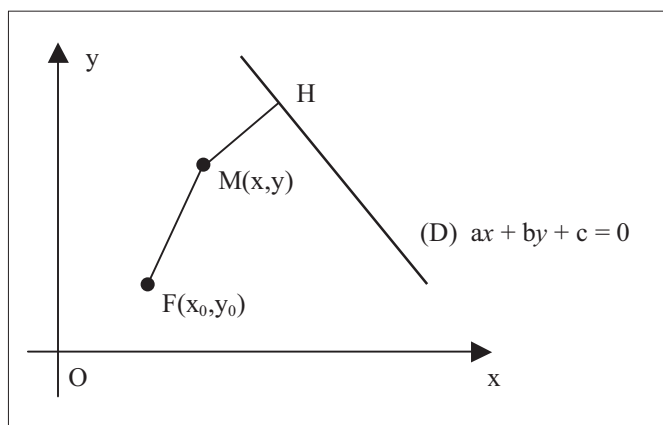


Figure 2.1 Conique définie par foyer et directrice.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow MF^2 - e^2 MH^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2} = 0 \end{aligned}$$

Équation de la forme :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(La distance du point $M(x, y)$ à la droite (D) étant égale à $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).

1.2 Équation polaire

■ Établissement de l'équation

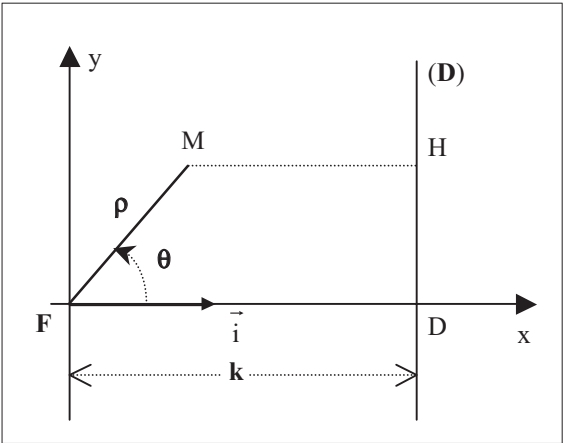


Figure 2.2 Rayon et angles polaires de la conique.

- Le foyer est pris pour origine et le vecteur unitaire $\vec{i}$ est perpendiculaire à (D) ;
 - k est la distance foyer directrice :
- $MF = |\rho|$
 $MH = |k - \rho \cos \theta|$
- $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |\rho| = e |k - \rho \cos \theta|$;
- cela conduirait à deux équations, mais une seule suffit.
- On pose $p = ek$, c'est le **paramètre**.

L'équation polaire est :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Le type de conique obtenu dépend de l'excentricité, comme indiqué dans le tableau suivant :

excentricité	courbe	remarque
$e = 0$	point ou cercle	cercle à la cond. nécessaire que $e \rightarrow 0$ et $k \rightarrow \infty$
$0 < e < 1$	ellipse	
$e = 1$	parabole	
$e > 1$	hyperbole	$-\theta_M < \theta < \theta_M$; $\cos \theta_M = -1/e$
$e \rightarrow \infty$	droite (D)	$\rho \approx p / e \cos \theta = k / \cos \theta$

Le paragraphe 3 précisera quelques aspects intéressants relatifs aux problèmes de continuité lorsque e varie de 0 à l'infini.

Ainsi, la figure 2.5 illustre l'évolution des courbes, la distance foyer-directrice étant maintenue constante.

Valeurs particulières :

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \rho = ek = p$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{p}{1+e}, \text{ on est au } \mathbf{p\acute{e}ricentre} \text{ de l'ellipse.}$$

$$\text{Cas de l'ellipse} \quad \theta = \pi \Rightarrow \rho_\pi = \frac{p}{1-e}, \text{ on est \textbf{\textit{à l'apocentre}} de l'ellipse.}$$

$$\text{Cas de l'hyperbole } \theta \rightarrow \pm \theta_M \Rightarrow \rho \rightarrow \infty$$



L'expression de l'excentricité de l'ellipse en fonction de ρ_0 et ρ_π est :

$$e = \frac{\rho_\pi - \rho_0}{\rho_\pi + \rho_0}$$

■ Cas de l'ellipse

La figure 2.3 fait apparaître en plus de F et (D), le foyer F' et la directrice (D') symétriques par rapport au centre O caractérisé comme suit :

Le foyer F est l'origine ;

A et A' ont pour coordonnées A ($\rho_0, 0$) et A' ($-\rho_\pi, 0$) ;

les coordonnées du milieu O de AA' sont O ($\frac{\rho_0 - \rho_\pi}{2}, 0$).

On déduit :

$$\overline{A'A} = \rho_0 + \rho_\pi \quad \overline{F'F} = \rho_\pi - \rho_0$$

Ox est l'**axe focal** ; Oy l'**axe non focal**.

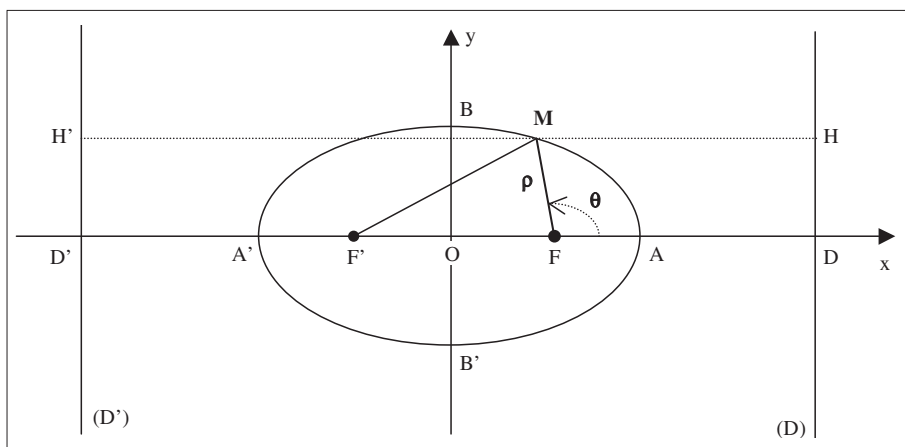


Figure 2.3 Points caractéristiques et directrices de l'ellipse.

Détermination de a, c, b

Classiquement, on pose $a = \overline{OA}$

$$a = \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$c = \overline{OF}$$

$$c = \frac{\rho_\pi - \rho_0}{2} = \frac{ep}{1 - e^2}$$

On déduit

$$c/a = e$$

$$\rho_0 = a - c ; \rho_\pi = a + c$$

On introduit b tel que

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{\rho_0 \rho_\pi} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

On déduit

$$b/a = \sqrt{1 - e^2}, \text{ c'est le coefficient d'aplatissement.}$$

La distance 2a représente le **grand axe** ; la distance 2b le **petit axe**.

La distance 2c est la **distance focale**.

a apparaît comme la **moyenne arithmétique** des rayons au péricentre et à l'apocentre.

b apparaît comme la **moyenne géométrique** de ces mêmes rayons.

Le rapport moyenne géométrique sur moyenne arithmétique vaut $\sqrt{1 - e^2}$.

Dans la littérature, la distance moyenne au centre est tout simplement le demi-grand axe de l'ellipse. On pourrait également retenir comme rayon moyen ρ_m la racine carrée du produit du demi-grand axe par le demi-petit axe :

$$\rho_m = (ab)^{1/2}$$

Cela se justifierait par le fait que le cercle de rayon ρ_m a la même surface que celle de l'ellipse.

Détermination de p, k, d, e

Considérons le paramètre p et la distance foyer directrice k :

$$p = a(1 - e^2) \Rightarrow p = b^2/a$$

$$k = p/e \Rightarrow k = b^2/c$$

Soit d la distance de O à (D), $d = OD = OF + FD = c + k$, d'où

$$d = a^2/c$$

Rappel

$$e = c/a$$

Précisions sur le vocabulaire

Nous avons utilisé les noms péricentre et apocentre pour désigner la position respectivement la plus proche et la plus éloignée du foyer considéré de l'ellipse. Si le foyer correspond à la position d'un astre quelconque, on parlera de **périastre** et d'**apoastre**. Si l'astre est la Terre on retient les termes **périgée** et **apogée** ; et pour le Soleil, **périhélie** et **aphélie**.

■ Cas de l'hyperbole

On part de $\rho_0 = a - c = \frac{p}{1 + e}$

et on pose $\frac{c}{a} = e$

On vérifie alors que : $k = \frac{p}{e} = (a - c) \frac{1 + e}{e} = \frac{a^2 - c^2}{c}$

Introduisant b tel que : $b^2 = c^2 - a^2$

on obtient $k = -\frac{b^2}{c}$, $p = -\frac{b^2}{a}$

Afin que les paramètres k et p soient positifs, il convient que a et c soient négatifs.

On retient finalement les deux jeux de formules :

$a = \frac{p}{1 - e^2}$	$c = \frac{ep}{1 - e^2}$	$b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$
$p = -\frac{b^2}{a}$	$k = -\frac{b^2}{c}$	$d = \frac{a^2}{c}$

1.3 Passage de l'équation polaire à l'équation cartésienne

■ Cas où $e \neq 1$

L'origine est prise en O milieu des deux foyers. Soit M(x,y) un point de l'ellipse.

$$x = \overline{OF} + \rho \cos \theta = c + \frac{\frac{b^2}{a} \cos \theta}{1 + \frac{c}{a} \cos \theta} \quad (\text{pour l'hyperbole, } p = -b^2/a)$$

$$y = \rho \sin \theta = \frac{\frac{b^2}{a} \sin \theta}{1 + \frac{c}{a} \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} x^2/a^2 &= (c/a + c^2/a^2 \cos \theta + b^2/a^2 \cos^2 \theta) / (1 + c/a \cos \theta)^2 \\ &= (c/a + \cos^2 \theta) / (1 + c/a \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

$$y^2/b^2 = (b/a \sin \theta)^2 / (1 + c/a \cos \theta)^2$$

$$\begin{aligned} x^2/a^2 + y^2/b^2 &= (c^2/a^2 + \cos^2 \theta + 2 c/a \cos \theta + b^2/a^2 \sin^2 \theta) / (1 + c/a \cos \theta)^2 \\ &= [c^2/a^2 + b^2/a^2 + (1 - b^2/a^2) \cos^2 \theta + 2 c/a \cos \theta] / (1 + c/a \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

Pour $e < 1$, $b^2 = a^2 - c^2$, on a l'équation de l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Pour $e > 1$, $b^2 = c^2 - a^2$, on a l'équation de l'hyperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

■ Cas où $e = 1$

L'origine O est prise au milieu du segment FD.

L'équation polaire de la parabole est

$$\rho = \frac{k}{1 + \cos \theta}$$

On déduit $\rho \cos \theta = k - \rho$

Le système : $| x = \rho \cos \theta - k/2$

$$| y = \rho \sin \theta$$

s'écrit : $| (x + k/2)^2 + y^2 = \rho^2$

$$| x = k/2 - \rho$$

et compte tenu de l'expression de ρ dans la deuxième égalité, l'équation cartésienne de la parabole est :

$$y^2 = -2 kx$$

où k représente la distance algébrique $\overline{FD}$.

2 Définition bifocale

2.1 Cas de l'ellipse

Par raison de symétrie, $\frac{MF}{MH} = \frac{MF'}{MH'} = e$

d'où $MF + MF' = e(MH + MH') = eD'D = 2ed = 2a$

On retrouve la définition de l'ellipse comme lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, les foyers, est constante.

On déduit que $BF = BF' = a$.

2.2 Cas de l'hyperbole

Se référant à la figure 2.4, on a les égalités

$$MF' - MF = e(MH' - MH) = 2 |ed| = 2|a|$$

Les valeurs absolues se justifient par un soucis de continuité ; c'est-à-dire que F est toujours à gauche de (D) et F' passe de moins l'infini à plus l'infini lorsque e croît de $1-\epsilon$ à $1+\epsilon$, et par conséquent a et c deviennent négatifs.

On avait déjà posé $b^2 = c^2 - a^2$ ce qui entraîne $p = -b^2/a > 0$

Ces considérations, en particulier sur le signe de a , auront un intérêt dans les études des énergies sur trajectoire.

L'hyperbole est maintenant définie comme le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante.

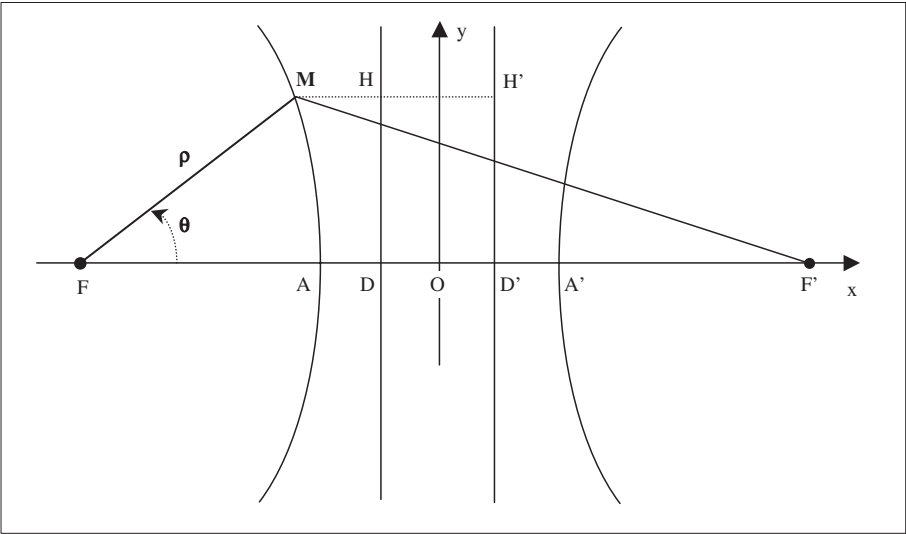


Figure 2.4 Points caractéristiques et directrices de l'hyperbole.

3 Évolution des courbes représentatives

- La figure 2.5 ci-dessous représente l'évolution de la courbe représentative de l'équation polaire pour différentes valeurs de l'excentricité e . La distance foyer-directrice, k , est maintenue constante.

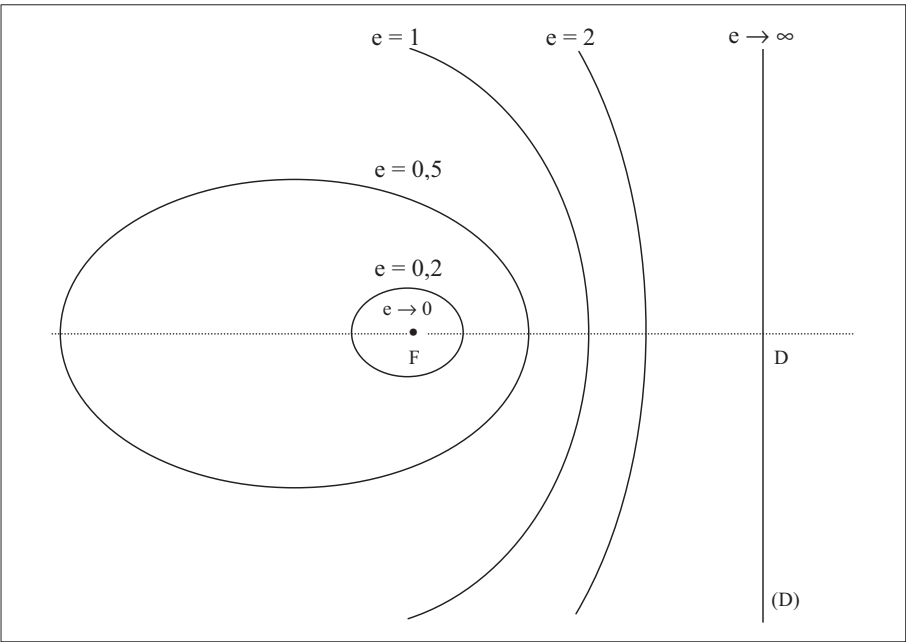


Figure 2.5 Évolution des coniques avec l'excentricité.

La continuité pour e tendant vers 1 a été examinée. Précisons les limites lorsque l'excentricité tend vers zéro et l'infini.

3.1 Cas $e \rightarrow 0$

– La conique, ellipse, se réduit normalement au point F ;

cela se déduit de la définition $\frac{MF}{MH} = e$

– Toutefois, considérant l'équation polaire, on voit qu'il existe en fait deux possibilités dépendant de la distance foyer directrice :

- $k = \text{constante}$,

Alors $p \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow 0$: on obtient le point F ; c et a sont nuls.

- $k \rightarrow \infty$,

Alors $p = ek \rightarrow C^{\text{te}} = R_p$; et comme $\rho \rightarrow p$ on obtient un cercle de rayon R_p .

On note que $c = 0$,

$$a = b = R_p,$$

$$d = \infty.$$

Ainsi l'ellipse devient un cercle d'équation :

$$\rho = R_p \text{ ou } x^2 + y^2 = R_p^2$$

3.2 Cas $e \rightarrow \infty$

On déduit :

$$\rho \approx \frac{p}{e \cos \theta} \text{ soit } \rho \cos \theta \approx \frac{p}{e} \approx k$$

La conique, branche d'hyperbole, devient la droite d'équation :

$$\rho \cos \theta = k \text{ ou } x = k$$

Cette droite est la directrice (D).

- À la figure 2.5, la distance foyer directrice était une constante. On peut également tracer les courbes fonction du paramètre excentricité en considérant que la distance ρ_0 foyer-extremum est une donnée, $\rho_0 = R_p$, comme dans le cas de la mise en orbite d'un satellite d'une planète P.

La représentation sera fournie à la figure 7.1.

Dans cette hypothèse,

$$R_p = \frac{ek}{1+e} ; \text{ et } k = R_p \frac{1+e}{e}$$

Pour $e \rightarrow 0$ $k \rightarrow \infty$ la courbe tend vers le cercle ;

$e = 1$ $k = 2R_p$ la courbe est la parabole ;

$e \rightarrow \infty$ $k \rightarrow R_p$ la courbe tend vers une droite.

exercices

E2-1 Géométrie de l'ellipse en fonction du demi-grand axe et de l'excentricité

1. Reporter sur une figure les différentes dimensions de l'ellipse en fonction du demi-grand axe a et de l'excentricité e :

On fera ainsi apparaître les expressions de OB , OF , OD , FA' , FA , FD .

Positionner le paramètre p .

2. Calculer pour la planète Mercure :

– OD , OF , OP , OB , ainsi que FD , FA , FP , FB , FP' , FA' ;

– les angles (FA, FB) et (FA, FP') .

Données : $a = 0,387\,098\text{ ua}$; $e = 0,205\,632$.

3. Calculer pour la Terre la différence entre les rayons vecteurs à l'aphélie et au périhélie ; l'exprimer en km et commenter.

Calculer également le demi-petit axe, ainsi que la différence en km avec le demi-grand axe.

Données : $a = 1,000\,001\text{ ua}$; $e = 0,016\,710$.

solutions

1.

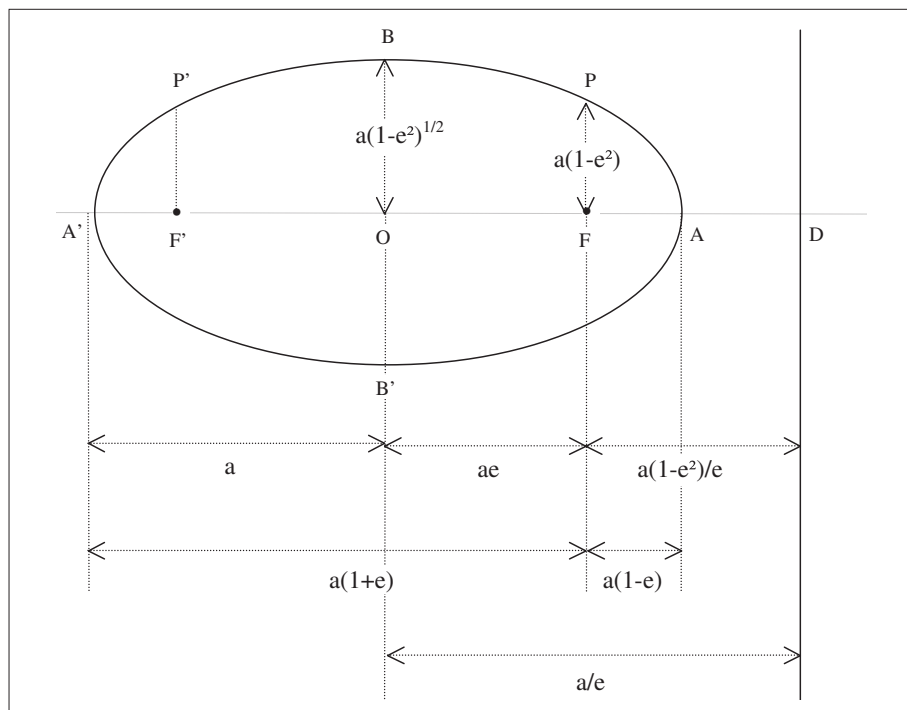


Figure 2.6 Coordonnées caractéristiques de l'ellipse en fonction du demi-grand axe et de l'excentricité.

2. Planète Mercure

– Calcul de OD, OF, OP, OB :

$$OD = d = a/e \rightarrow OD = 1,882\,479 \text{ ua}$$

$$OF = c = ae \rightarrow OF = 0,079\,600 \text{ ua}$$

$$OA = a \text{ (donnée)} \rightarrow OA = 0,387\,098 \text{ ua}$$

$$OP = (c^2 + p^2)^{1/2} = a(e^4 - e^2 + 1)^{1/2} \rightarrow OP = 0,379\,179 \text{ ua}$$

$$OB = b = a(1-e^2)^{1/2} \rightarrow OB = 0,378\,825 \text{ ua}$$

– Calcul de FD, FA, FP, FB, FP', FA' :

$$FD = k = a(1-e^2)/e \rightarrow FD = 1,802\,880 \text{ ua}$$

$$FA = \rho_0 = a(1-e) \rightarrow FA = 0,307\,498 \text{ ua}$$

$$FP = p = a(1-e^2) \rightarrow FP = 0,370\,730 \text{ ua}$$

$$FB = \rho_{\theta b} = a \rightarrow FB = 0,387\,098 \text{ ua}$$

$$FP' = \rho_{\theta p'} = (4c^2 + p^2)^{1/2} = a(1+e^2) \rightarrow FP' = 0,403\,466 \text{ ua}$$

$$FA' = \rho_{\pi} = a(1+e) \rightarrow FA' = 0,466\,698 \text{ ua}$$

– Calcul de (FA, FB) et (FA, FP') :

$$(FA, FB) = 90^\circ + \arctg(c/b) = 90^\circ + \arctg \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \rightarrow (FA, FB) = 101^\circ,866$$

$$(FA, FP') = 90^\circ + \arctg(2c/p) = 90^\circ + \arctg \frac{2e}{1-e^2} \rightarrow (FA, FP') = 113^\circ,240$$

3. Planète Terre

$FA' - FA = \rho_{\pi} - \rho_0 = 2ae$ (c'est la distance focale) $\rightarrow FA' - FA = 0,033\,420 \text{ ua}$;
or, voir chapitre précédent, $1 \text{ ua} = 149,597\,871 \times 10^6 \text{ km}$, d'où

$$FA' - FA = 4\,999\,566 \text{ km}$$

La différence des rayons vecteurs à l'aphélie et au périhélie, c'est-à-dire la distance focale, est de pratiquement cinq millions de kilomètres, soit 13 fois la distance Terre-Lune, ou encore 125 périmètres terrestres.

$$OB = b = a(1-e^2)^{1/2} \rightarrow OB = 0,999\,861 \text{ ua}$$

$$OA - OB = a - b \rightarrow OA - OB = 0,000\,140 \text{ ua}$$

$$OA - OB = 20\,885 \text{ km}$$

Ainsi la différence entre le grand axe et le petit axe de notre planète est pratiquement égale à son périmètre.

➤ Remarque

Les rayons au péricentre et à l'apocentre sont parfois notés respectivement **q** et **Q** :

$$q = FA = \rho_0 = a(1-e)$$

$$Q = FA' = \rho_{\pi} = a(1+e)$$

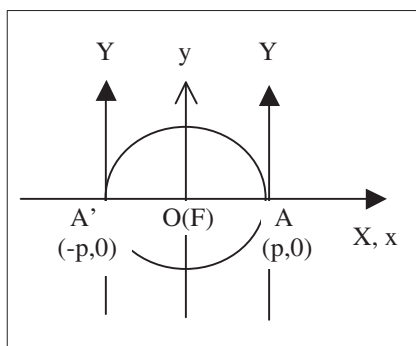
E2-2 Équation commune aux coniques en fonction du paramètre et de l'excentricité

Donner une équation commune au cercle, à l'ellipse, la parabole et l'hyperbole en fonction du paramètre et de l'excentricité. On choisira comme axe des abscisses l'axe de symétrie contenant le ou les deux foyers. L'axe des ordonnées sera pris tangent à l'extremum que l'on précisera.

solutions

Le paramètre est désigné par p ; l'excentricité par e .

• Cercle ($e = 0$)



Le rayon est égal à p .

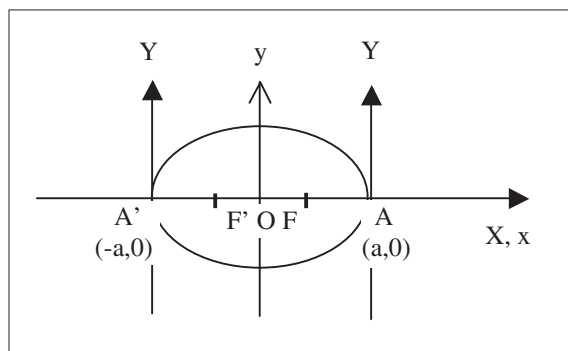
Dans le référentiel (O, x, y) , l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = p^2$

Origine en A : $y = Y$; $x = \varepsilon p + X$ avec $\varepsilon = +1$

Origine en A' : $y = Y$; $x = \varepsilon p + X$ avec $\varepsilon = -1$

On aboutit à l'équation : $Y^2 = -2\varepsilon pX - X^2$

• Ellipse ($0 < e < 1$)



Dans le référentiel (O, x, y) , l'équation de l'ellipse est $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$

Origine en A : $y = Y$; $x = \varepsilon a + X$ avec $\varepsilon = +1$

Origine en A' : $y = Y$; $x = \varepsilon a + X$ avec $\varepsilon = -1$

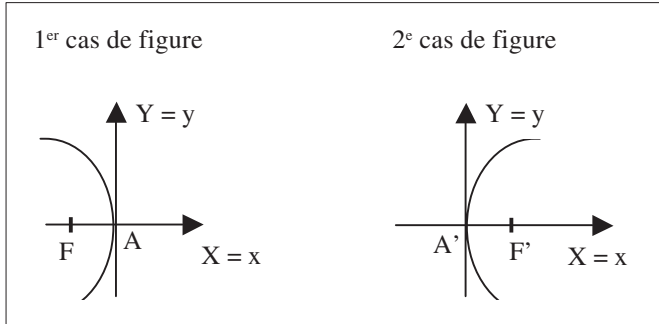
d'où : $X^2/a^2 + 2\varepsilon X/a + Y^2/b^2 = 0$

soit : $Y^2 = -2\varepsilon (b^2/a)X - (b^2/a^2)X^2$

Or $b^2/a = p$ et $b^2/a^2 = 1 - e^2$

On obtient pour équation : $Y^2 = -2\varepsilon pX + (e^2 - 1)X^2$

• **Parabole ($e = 1$)**



Sommet A :

On a établi l'équation de la parabole, $y^2 = -2kx$

Or $p = ek = k$

On note donc $Y^2 = -2pX$

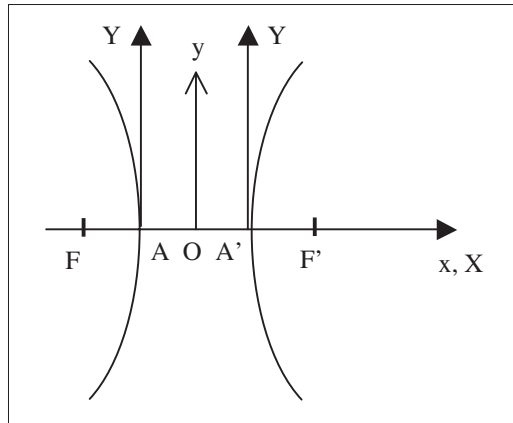
Sommet A' :

$Y^2 = 2pX$

Introduisant ε tel que défini précédemment, l'équation s'écrit :

$$Y^2 = -2\varepsilon pX$$

• **Hyperbole ($e > 1$)**



Dans le référentiel (O, x, y), l'équation de l'hyperbole est :

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$$

Origine en A : $y = Y$; $x = -\varepsilon a + X$ avec $\varepsilon = +1$

Origine en A' : $y = Y$; $x = -\varepsilon a + X$ avec $\varepsilon = -1$

$$\text{d'où : } X^2/a^2 - 2\epsilon X/a - Y^2/b^2 = 0$$

$$\text{soit : } Y^2 = -2\epsilon (b^2/a)X + (b^2/a^2)X^2$$

$$\text{Or } -(b^2/a) = p \text{ et } b^2/a^2 = e^2 - 1$$

$$\text{On obtient pour équation : } Y^2 = 2\epsilon pX + (e^2 - 1)X^2$$

• Conclusion

Moyennant le choix correct des « sommets », quelque soit $e \geq 0$, on obtient les deux équations communes suivantes :

$$Y^2 = 2pX + (e^2 - 1)X^2$$

$$Y^2 = -2pX + (e^2 - 1)X^2$$

➤ Remarque

Avant de clore ce chapitre, précisons que les termes conique, ellipse, parabole et hyperbole trouvent leur origine en particulier dans les travaux de deux mathématiciens célèbres de la Grèce antique, à savoir Menaechmus (environ 380-320 avant J.-C.) et Appolonius de Perge (environ 262-190 avant J.-C.).

C'est Menaechmus qui le premier définit les coniques comme intersection d'un cône et d'un plan ; peut-être même aurait-il inventé les mots parabole et hyperbole pour désigner les courbes obtenues respectivement lorsque le plan est parallèle à une génératrice du cône ou lorsqu'il coupe les deux nappes de celui-ci.

Environ un siècle plus tard, Appolonius de Perge écrivit un important ouvrage en huit tomes qu'il intitula Coniques, toujours par référence à l'intersection d'un cône avec un plan ; les termes ellipse, parabole, hyperbole y étaient introduits. Ce livre allait bien au-delà de tout ce qui avait été étudié au paravant sur le sujet, y compris par le célèbre Euclide (environ 325-265 avant J.-C.).

Chapitre 3

Mouvements à accélération centrale

Nous rappelons que la trajectoire d'un point matériel, soumis à une accélération dirigée vers un centre attractif, est plane et satisfait à la loi des aires énoncée par Kepler, la première constante dynamique y reliant l'aire décrite au temps écoulé. Pour une accélération inversement proportionnelle au carré de la distance, nous démontrerons que la trajectoire est alors une conique et préciserons la vitesse du mobile sur celle-ci.

Dans le premier exercice proposé, cette vitesse et ses composantes sont exprimées en fonction de l'excentricité en certains points particuliers de l'ellipse. Avec le second exercice, nous calculons les vitesses des planètes au périhélie et à l'aphélie et en déduisons une vitesse moyenne qui nous permet de formuler la 3^e loi de Kepler...

1 Rappels de cinématique du point

On exprime la position, la vitesse et l'accélération d'un point P de la courbe $\mathcal{C}$, en utilisant les coordonnées cylindriques comme précisé à la figure 3.1.

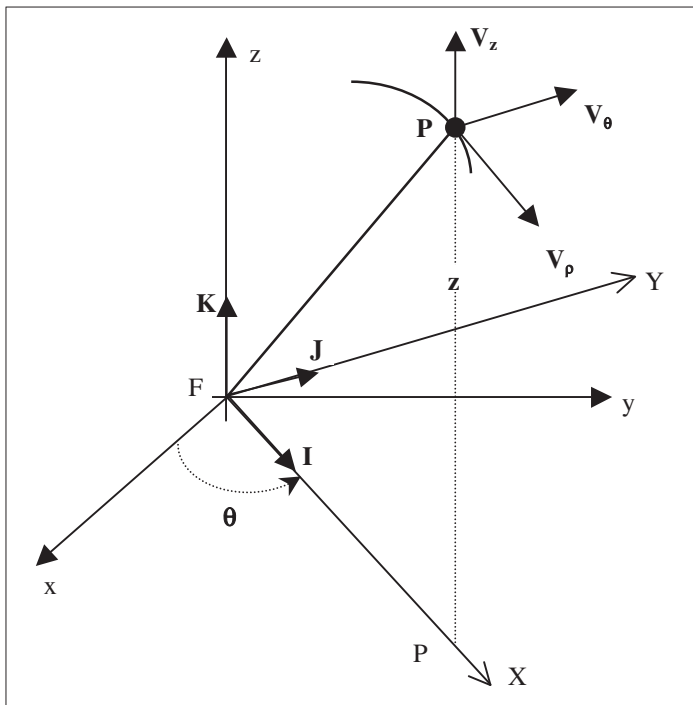


Figure 3.1 Coordonnées cylindriques d'un point P de la courbe.

- *Coordonnées de P*

ρ est le rayon polaire, θ l'angle polaire et z la cote ; il vient immédiatement :

$$\overrightarrow{FP} = \rho \vec{I} + z \vec{k}$$

- *Vitesse de P*

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{FP}}{dt} = \dot{\rho} \vec{I} + \rho \frac{d\vec{I}}{dt} + \dot{z} \vec{k} ; \text{ or } \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{I}}{d\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{J}$$

on obtient par conséquent :

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{I} + \rho \dot{\theta} \vec{J} + \dot{z} \vec{k}$$

Les coordonnées cylindriques du vecteur vitesse sont donc :

$$V_{\rho} = \dot{\rho}$$

$$V_{\theta} = \rho \dot{\theta}$$

$$V_z = \dot{z}$$

Pour un mouvement plan, les composantes de $\vec{V}$ sont la vitesse radiale V_ρ et la vitesse transversale V_θ .

• *Accélération de P*

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}, \text{ soit : } \vec{\Gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{I} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{J} + \ddot{z}\vec{k}$$

Les coordonnées du vecteur accélération sont par conséquent :

$$\begin{aligned}\Gamma_\rho &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ \Gamma_\theta &= (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \\ \Gamma_z &= \ddot{z}\end{aligned}$$

2 Propriétés du mouvement à accélération centrale

2.1 Définition du mouvement à accélération centrale

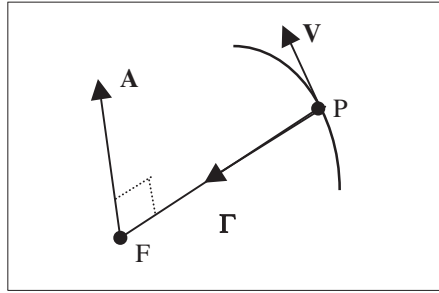


Figure 3.2 Trajectoire plan de P.

On peut le définir par la relation vectorielle :

$$\vec{FP} \wedge \vec{\Gamma} = 0$$

Soit $\vec{A}$ le moment du vecteur vitesse $\vec{V}$ par rapport à F,

$$\vec{A} = \vec{FP} \wedge \vec{V}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{V} + \vec{FP} \wedge \vec{\Gamma} \equiv 0$$

Donc : $\vec{A} = \text{constante}$

Compte tenu de la définition de $\vec{A}$, on en déduit que le mouvement s'effectue dans un plan fixe passant par le centre des accélérations (figure 3.2).

Du reste, on vérifie que :

$$\vec{A} \cdot \vec{FP} = (\vec{FP} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{FP} \equiv 0, \text{ ce qui entraîne bien } \vec{FP} \perp \vec{A}.$$

2.2 Loi des aires

On se place dans le plan de la trajectoire, et on utilise les coordonnées polaires.

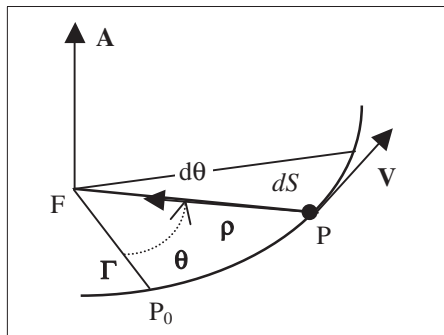


Figure 3.3 Coordonnées polaires de P.

Le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{I} + \rho\dot{\theta}\vec{J}$$

Sa norme au carré est :

$$\|\vec{V}\|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2, \text{ on notera simplement } V^2.$$

Le vecteur accélération passant par F : $\Gamma_\theta = 0$.

Or :

$$(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})$$

On déduit que $\rho^2\dot{\theta}$ est une constante.

La **première constante dynamique**, **C**, du mouvement est :

$$C = \rho^2\dot{\theta}$$

Pendant la durée dt , le rayon vecteur $\vec{FP}$ balaye l'aire dS (voir figure 3.3),

$$dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \|\vec{FP} \wedge \vec{V}\|.dt = \frac{1}{2} \|\vec{A}\|.dt$$

On introduit la **vitesse aréolaire** $\dot{S}$:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} C$$

À une constante près, $S = \frac{1}{2} Ct$

L'aire balayée est proportionnelle au temps.

C'est la « **loi des aires** » : les rayons vecteurs balayent des aires égales pendant des temps égaux. Il s'agit de la seconde loi de Kepler, qu'il formula en 1602, c'est-à-dire avant sa première loi sur la forme elliptique des orbites déduite de l'étude de Mars. La genèse de ces deux lois est expliquée dans l'*Astronomia nova*, imposant ouvrage de 70 chapitres qui fut publié en 1609.

Johannes Kepler découvrit sa troisième loi (voir chapitre 6) beaucoup plus tard, en 1618, et l'énonça dans le dernier chapitre de son ouvrage *Harmonice mundi* publié en 1619.

2.3 Formules de Binet

Jacques Binet (1786-1856) fut professeur de mécanique, il s'est également illustré en mathématiques (formulation du $n^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonacci faisant apparaître le nombre d'or).

■ Établissement des formules

On élimine le temps dans les expressions de la vitesse (V^2) et de l'accélération ($\bar{\Gamma} = \Gamma_\rho$).

D'après la loi des aires, $\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2}$

Ainsi
$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{C}{\rho^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

$$\ddot{\rho} = -C \dot{\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{C^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Les **formules de Binet** s'écrivent :

$$V^2 = C^2 \left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma} = -\frac{C^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

■ Application dans le cas où $\bar{\Gamma} = -\frac{\mu}{\rho^2} \bar{I}$

La signification de la constante μ sera donnée plus tard, au chapitre 6.

- La formule de Binet relative à l'accélération conduit à :

$$\frac{\mu}{\rho^2} = \frac{C^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

d'où en isolant les constantes C et μ

$$\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\mu}{C^2}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$\frac{1}{\rho} = B \cos(\theta - \theta_0)$$

B et θ_0 étant les deux constantes d'intégration.

La solution particulière de l'équation avec second membre est :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{C^2}$$

On déduit la solution générale de l'équation avec second membre :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{C^2} + B \cos(\theta - \theta_0)$$

Choisissant l'axe polaire tel que $\theta_0 = 0$, on obtient :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{avec } p = \frac{C^2}{\mu} \quad \text{et } e = B \frac{C^2}{\mu}$$

La trajectoire est une conique.

Notons que $p = \frac{C^2}{\mu}$ entraîne $C = \sqrt{\mu p}$ et $\frac{C}{p} = \frac{\mu}{C} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}$

• La formule de Binet relative à la vitesse, dans laquelle on remplace ρ par l'expression en fonction de θ , conduit à :

$$V^2 = C^2 \left[\frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p^2} + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{p^2} \right] = \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta)$$

soit :

$$V = \frac{\mu}{C} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}$$

3 Expressions de V et Γ selon l'excentricité

3.1 Expressions de la vitesse

■ Cercle ($e = 0$)

La constante d'intégration B est nulle ; par conséquent : $\rho = p = R_p = \frac{C^2}{\mu}$

Le module de la vitesse se déduit de $\vec{V} = \dot{\rho} \vec{I} + \rho \dot{\theta} \vec{J}$
 $V = V_\theta = R_p \dot{\theta}$

Compte tenu de la loi des aires,

$$V = \frac{C}{R_p} = \frac{\mu}{C} = \sqrt{\frac{\mu}{R_p}}$$

Ce résultat s'obtient directement à partir de l'expression de la vitesse en fonction de e .

■ Ellipse ($0 < e < 1$)

Les expressions de la vitesse V_0 au périhélie ($\theta = 0$) et de la vitesse V_π à l'apogée ($\theta = \pi$) sont :

$$V_0 = \frac{\mu}{C} (1 + e) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e)$$

$$V_\pi = \frac{\mu}{C} (1 - e) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - e)$$

On en déduit les moyennes arithmétique et géométrique :

$$\frac{V_0 + V_\pi}{2} = \frac{\mu}{C} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \quad \sqrt{V_0 V_\pi} = \frac{\mu}{C} \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 - e^2}$$

On note au passage que le rapport de la moyenne géométrique à la moyenne arithmétique est égal à $\sqrt{1 - e^2}$.

Exprimons les expressions ci-dessus en introduisant les rayons ρ_0 et ρ_π .

On rappelle que :

$$\rho_0 = p/(1 + e) \quad \text{et} \quad \rho_\pi = p/(1 - e)$$

d'où on déduit :

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \sqrt{1 + e}$$

$$V_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_\pi}} \sqrt{1 - e}$$

On sait également que : $\rho_0 \rho_\pi = \frac{p^2}{1 - e^2}$ et $\frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} = \frac{p}{1 - e^2}$

Ainsi :

$$\sqrt{V_0 V_\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{\frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

Autre résultat intéressant :

$$\frac{\sqrt{V_0 V_\pi}}{\frac{V_0 + V_\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_0 \rho_\pi}}{\frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2}} = \sqrt{1 - e^2}$$

Enfin, les rapports entre ρ_π et ρ_0 d'une part, V_π et V_0 d'autre part s'expriment simplement en fonction de e :

$$\rho_\pi = \rho_0 \frac{1 + e}{1 - e} \quad \text{et} \quad V_\pi = V_0 \frac{1 - e}{1 + e}$$

ce qui conduit à :

$$\rho_\pi V_\pi = \rho_0 V_0$$

■ Parabole ($e = 1$)

L'expression de V en fonction de e devient :

$$V = \sqrt{2} \frac{\mu}{C} \sqrt{1 + \cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + \cos \theta}$$

d'où les valeurs particulières :

$$V_0 = 2 \frac{\mu}{C} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \sqrt{2} \quad (\text{pour } \theta = 0, \rho_0 = p/2 = k/2),$$

et

$$V_{\theta \rightarrow \pm\pi} \Rightarrow 0$$

■ Hyperbole ($e > 1$)

On a noté que $-\theta_M < \theta < \theta_M$ avec $\cos(\pm\theta_M) = -1/e$.

Les expressions des valeurs particulières sont :

$$V_0 = \frac{\mu}{C}(1 + e) = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}\sqrt{1 + e}$$

$$V_{\theta \rightarrow \pm\theta_M} \Rightarrow \frac{\mu}{C}\sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\sqrt{e^2 - 1}$$

Elles sont liées par la relation :

$$V_{\theta \rightarrow \pm\theta_M} = V_0 \sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}}$$

3.2 Expressions de l'accélération centrale

La valeur algébrique de l'accélération est : $\Gamma = -\frac{\mu}{\rho^2}$
Compte tenu de l'expression de ρ on obtient :

$$\Gamma = -\frac{\mu}{p^2}(1 + e \cos \theta)^2$$

■ Cercle

On avait posé $p = R_p$, d'où : $\Gamma = -\frac{\mu}{R_p^2} = -\frac{V^2}{R_p}$ (puisque $V = \sqrt{\frac{\mu}{R_p}}$)

On peut aussi écrire directement :

$$\Gamma = -R_p \dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{R_p^3} \quad \text{avec :} \quad \frac{C^2}{R_p^2} = \frac{\mu}{R_p} = V^2$$

■ Ellipse

$$\Gamma_0 = -\frac{\mu}{p^2}(1 + e)^2 = -\frac{\mu}{\rho_0^2} = -\frac{V_0^2}{\rho_0} \frac{1}{1 + e} = -\frac{V_0^2}{p}$$

$$\Gamma_\pi = -\frac{\mu}{p^2}(1 - e)^2 = -\frac{\mu}{\rho_\pi^2} = -\frac{V_\pi^2}{\rho_\pi} \frac{1}{1 - e} = -\frac{V_\pi^2}{p}$$

On a évidemment : $\Gamma_\pi \rho_\pi^2 = \Gamma_0 \rho_0^2 = \Gamma \rho^2 = -\mu$

■ Parabole

$$\Gamma_0 = -4 \frac{\mu}{p^2} = -\frac{\mu}{\rho_0^2} = -\frac{V_0^2}{2\rho_0} = -\frac{V_0^2}{p}$$

$$\Gamma_{\theta \rightarrow \pm\pi} \Rightarrow 0$$

■ **Hyperbole**

$$\Gamma_0 = -\frac{\mu}{p^2}(1+e)^2 = -\frac{\mu}{\rho_0^2} = -\frac{V_0^2}{\rho_0} \frac{1}{1+e} = -\frac{V_0^2}{p}$$

$$\Gamma_{\theta \rightarrow \pm \theta_m} \Rightarrow 0$$

4 Orientation du vecteur vitesse

4.1 Angle avec le rayon vecteur

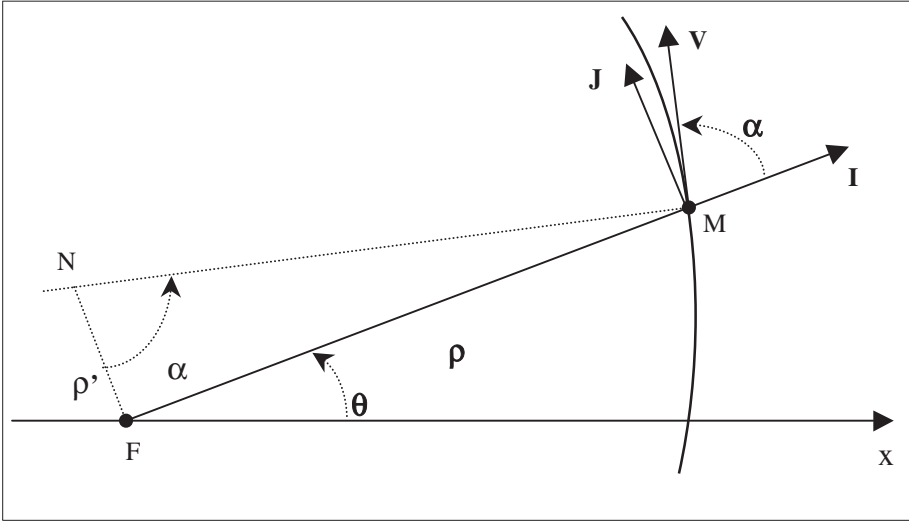


Figure 3.4 Vecteur vitesse dans le repère mobile.

Comme précisé sur la figure 3.4, α est l'angle du vecteur vitesse $\vec{V}$ en M avec le vecteur unitaire $\vec{I}$.

Pour un déplacement infinitésimal ds de M en M' sur la courbe, on peut écrire :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho d\theta}{d\rho}, \text{ soit } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{\rho'}$$

La perpendiculaire en F au rayon vecteur $\rho \vec{I}$ et la perpendiculaire en M au vecteur vitesse se coupent en N.

On déduit : $(FN, NM) = \alpha$

et on note que

$$\overline{FN} = \rho'$$

D'autre part, $\rho = p/(1 + e \cdot \cos \theta)$

d'où :

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = p \frac{e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \rho \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} = \rho^2 \frac{e \sin \theta}{p}$$

On retiendra :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta}$$

Donnons quelques valeurs particulières du couple (α, θ) :

– Pour $\theta = 0 \rightarrow \alpha = \pi/2$

– Pour $\theta = \pi/2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1/e$

– L'angle θ tel que $\theta + \alpha = \pi$, c'est-à-dire tel que le vecteur vitesse soit horizontal, satisfait à :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\operatorname{tg} \theta = \frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta}$$

La relation est : $\cos \theta = -e$, pourvu que $e \leq 1$,

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = +e, \text{ soit encore } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e}$$

4.2 Composantes du vecteur vitesse

Rappelons l'expression du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \dot{\rho} \vec{I} + \rho \dot{\theta} \vec{J} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{I} + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{J} = (\rho' \vec{I} + \rho \dot{\theta} \vec{J})$$

On vérifie que :

$$\rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_\theta}{V_\rho} = \frac{\rho}{\rho'}$$

$$\rightarrow V^2 = (\rho'^2 + \rho^2) \dot{\theta}^2$$

Les relations donnant le module et les coordonnées sont :

module :

$$V = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} \dot{\theta} = NM \dot{\theta}$$

composante radiale :

$$V_\rho = \rho' \dot{\theta} = \overline{FN} \dot{\theta}$$

composante orthoradiale :

$$V_\theta = \rho \dot{\theta} = \overline{FM} \dot{\theta}$$

Si le mouvement obéit à la loi des aires, $\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2}$, et

$$V = C \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{\rho'^2}{\rho^4}} = \frac{C}{\rho} \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{c'est la première formule de Binet})$$

$$V_\rho = C \frac{\rho'}{\rho^2} = \frac{C}{\rho} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$V_\theta = C \frac{1}{\rho}$$

Si en plus l'accélération est en $1/p^2$, alors $\rho = p/(1 + e \cos \theta)$, et les expressions s'écrivent :

$$V = \frac{C}{p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}$$

$$V_\rho = \frac{C}{p} e \sin \theta$$

$$V_\theta = \frac{C}{p} (1 + e \cos \theta)$$

➤ **Remarques :**

1- Le moment du vecteur vitesse par rapport à F étant $\overrightarrow{FM} \wedge \overrightarrow{V}$, on en tire que

$$\|\overrightarrow{FM} \wedge \overrightarrow{V}\| = \rho V \sin \alpha = C \quad (\text{voir figure 3.4})$$

d'où : $C = \rho V \sin \alpha = \rho V_\theta$

$$\text{et : } \sin \alpha = \frac{C}{\rho V} = \frac{V_\theta}{V} = \frac{1 + e \cos \theta}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}$$

$$\cos \alpha = \frac{V_\rho}{V} = \frac{e \sin \theta}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}$$

Pour $\theta = 0$, ou $\theta = \pi$, $\alpha = \pi/2$, ce qui donne :

$$C = \rho_0 V_0 = \rho_\pi V_\pi$$

L'intérêt de la relation $C = \rho V \sin \alpha$ apparaîtra par exemple aux exercices E5-1, E7-4 et E8-1.

2- L'expression de l'accélération centrale en fonction de la première constante dynamique C et du paramètre p est :

$$\Gamma = -\frac{C^2}{p^3} (1 + e \cos \theta)^2$$

exercices

E3-1 Vitesses en certains points de l'ellipse ; relations déduites

On considère l'ellipse de l'exercice E2-1 sur laquelle figurent certains points particuliers.

1. Calculer le module de la vitesse et ses composantes en A, P, B, P', et A'.
2. Calculer les produits $V_A V_{A'}$, $V_P V_{P'}$, et V_B^2 .
3. On donne la relation suivante entre anomalie vraie θ et excentrique φ :

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi - e}{1 - e \cos \varphi} \quad (\text{voir chapitre 5})$$

En déduire l'expression du module de la vitesse en fonction de φ .

Calculer le produit $V_{\varphi_1} V_{\varphi_2}$ pour deux positions symétriques par rapport au petit axe de l'ellipse ; conclure.

4. Calculer les produits ρV_θ en A, P, B, P', et A' ; remarques ?

solutions

1. Module V de la vitesse, composantes V_ρ et V_θ

Afin de simplifier l'écriture, on pose : $m = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$

On a établi que $\frac{C}{p} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}$; or $p = a(1 - e^2)$, d'où : $\frac{C}{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - e^2}}$

On en déduit les expressions du module et des composantes de la vitesse ;

$$V = m \sqrt{\frac{1 + e^2 + 2e \cos \theta}{1 - e^2}} \quad V_\rho = m \frac{e \sin \theta}{\sqrt{1 - e^2}} \quad V_\theta = m \frac{1 + e \cos \theta}{\sqrt{1 - e^2}}$$

– en A, $\theta = 0$,

$$V_A = V_0 = m \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad V_{\rho A} = 0 \quad V_{\theta A} = V_A$$

– en P, $\theta = \pi/2$,

$$V_P = m \sqrt{\frac{1 + e^2}{1 - e^2}} \quad V_{\rho P} = m \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \quad V_{\theta P} = m \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

– en B, $\cos(\pi - \theta) = FO/FB = e$, d'où : $\cos \theta = -e$ et $\sin \theta = (1 - e^2)^{1/2}$, il vient donc :

$$V_B = m = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad V_{\rho B} = me \quad V_{\theta B} = m \sqrt{1 - e^2}$$

– en P', $\cos(\pi - \theta) = FF'/FP' = 2e/(1 + e^2)$, d'où : $\cos \theta = -2e/(1 + e^2)$ et $\sin \theta = (1 - e^2)/(1 + e^2)$,
et par conséquent :

$$V_{P'} = m \sqrt{\frac{1-e^2}{1+e^2}}$$

$$V_{\rho P'} = m e \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e^2}$$

$$V_{\theta P'} = m \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e^2}$$

– en A' , $\theta = \pi$,

$$V_{A'} = V_{\pi} = m \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$V_{\rho A'} = 0$$

$$V_{\theta A'} = V_{A'}$$

2. Produits $V_A V_{A'}$, $V_P V_{P'}$, et V_B^2

On a immédiatement :

$$V_A V_{A'} (= V_0 V_{\pi}) = V_P V_{P'} = V_B^2 = m^2 = \mu/a$$

3. Module V_{φ} et produit $V_{\varphi 1} V_{\varphi 2}$

On part de :

$$\begin{aligned} 1 + e^2 + 2e \cos \theta &= \frac{(1 + e^2)(1 - e \cos \varphi) + 2e(\cos \varphi - e)}{1 - e \cos \varphi} \\ &= (1 - e^2) \frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du module de la vitesse en fonction de l'anomalie excentrique φ :

$$V_{\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi}}$$

Les deux positions symétriques par rapport au petit axe sont déterminées par deux angles φ_1 et φ_2 tels que :

$$\varphi_1 = (\pi/2 - \alpha), \text{ d'où } \cos \varphi_1 = + \sin \alpha$$

$$\varphi_2 = (\pi/2 + \alpha), \text{ d'où } \cos \varphi_2 = - \sin \alpha$$

On en tire :

$$V_{\varphi 1} V_{\varphi 2} = \mu/a$$

Le produit du module des vitesses en deux points symétriques par rapport au petit axe est une constante égale à μ/a .

4. Produits ρV_{θ}

On rappelle que :

$$\rho_A = a(1-e), \quad \rho_P = a(1-e^2), \quad \rho_B = a, \quad \rho_{P'} = a(1+e^2), \quad \rho_{A'} = a(1+e)$$

On déduit :

$$\rho_A V_{\theta A} (= \rho_0 V_0) = \rho_P V_{\theta P} = \rho_B V_{\theta B} = \rho_{P'} V_{\theta P'} = \rho_{A'} V_{\theta A'} (= \rho_{\pi} V_{\pi}) =$$

$$\sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} \equiv C$$

En effet :

$$C = \rho V_{\theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1 + e \cos \theta}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2}$$

E3-2 Vitesses des planètes du système solaire

Calculer pour les 8 premières planètes du système solaire la valeur numérique des vitesses au périhélie, à l'aphélie, et la vitesse moyenne V_B (moyenne géométrique).

Calculer pour chacune le rapport $(2\pi a)/V_B$, que l'on exprimera en jours ; qu'en déduit-on ?

Les données planétaires, demi-grand axe a , et excentricité e pour l'année 2003, sont :

Planète	a (ua)	e	Planète	a (ua)	e
Mercure	0,387 098	0,205 632	Jupiter	5,202 603	0,048 503
Vénus	0,723 330	0,006 773	Saturne	9,554 909	0,055 559
Terre	1,000 001	0,016 710	Uranus	19,218 446	0,046 382
Mars	1,523 679	0,093 403	Neptune	30,110 387	0,009 456

D'autre part :

$1 \text{ ua} = 149,597\,870\,61 \times 10^6 \text{ km}$ (voir chapitre 1) ;

la valeur de la constante héliocentrique de la gravitation est :

$\mu_s = 1,327\,124\,4 \times 10^{20} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ (voir chapitre 6) ;

$1 \text{ jour} = 86\,400 \text{ s}$.

solutions

• Formules utilisées :

Module de la vitesse $V = \sqrt{\frac{\mu_s}{a}} \sqrt{\frac{1 + e^2 + 2e \cos \theta}{1 - e^2}}$

Vitesse au périhélie $V_A = V_0 = \sqrt{\frac{\mu_s}{a}} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$

Vitesse à l'aphélie $V_{A'} = V_{\pi} = \sqrt{\frac{\mu_s}{a}} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$

Vitesse moyenne $V_B = \sqrt{V_0 V_{\pi}} = \sqrt{\frac{\mu_s}{a}}$

Les vitesses sont exprimées en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, $\mu_s = 13,271\,244 \times 10^{10} \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

• **Tableau :**

Planète	a (ua)	e	V _A (km.s ⁻¹)	V _{A'} (km.s ⁻¹)	V _B (km.s ⁻¹)	2πa/V _B (j)
Mercure	0,387 098	0,205 632	58,9765	38,8585	47,8721	87,97
Vénus	0,723 330	0,006 773	35,2587	34,7843	35,0207	224,70
Terre	1,000 001	0,016 710	30,2866	29,2911	29,7847	365,26
Mars	1,523 679	0,093 403	26,4990	21,9717	24,1294	686,97
Jupiter	5,202 603	0,048 503	13,7077	12,4395	13,0582	4 334,40
Saturne	9,554 909	0,055 559	10,1867	9,1144	9,6356	10 787,93
Uranus	19,218 446	0,046 382	7,1169	6,4860	6,7941	30 773,42
Neptune	30,110 387	0,009 456	5,4795	5,3769	5,4279	60 349,40

On constate que la dernière colonne correspond à la période sidérale des planètes (voir exercice E1-2). Le rapport $2\pi a/V_B$ exprime la troisième loi de Kepler, objet du chapitre 6 ; en effet on note que :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu_s}$$

➤ **Remarques**

1– Le tableau précédent donne les vitesses des planètes en certains points de leur orbite. La vraie vitesse moyenne sur la trajectoire elliptique passe par la connaissance du périmètre et sera donnée au chapitre 8 (paragraphe 2.1). Ci-dessous, nous avons calculé les **vitesses d'entraînement** définies comme suit :

$$V_E = \frac{2\pi R}{J}$$

où R est le rayon équatorial de la planète et J sa période de rotation, mesurée avec certaines réserves pour les planètes joviennes qui n'ont pas de sol.

Planète	R (km)	J (j ou h)	J (j, h, min, s)	V _E (km.s ⁻¹)
Mercure	2 440	58,646 225 j	58 j 15 h 30 min 34 s	0,003
Vénus	6 052	– 243,018 484 j	243 j 00 h 26 min 37 s	0,002
Terre	6 378	23,934 471 h	0 j 23 h 56 min 04 s	0,465
Mars	3 397	24,622 962 h	1 j 00 h 37 min 23 s	0,241
Jupiter	71 492	9,924 920 h	0 j 09 h 55 min 30 s	12,572
Saturne	60 268	10,656 222 h	0 j 10 h 39 min 22 s	9,871
Uranus	25 559	– 17,240 000 h	0 j 17 h 14 min 24 s	2,588
Neptune	24 764	16,110 000 h	0 j 16 h 06 min 36 s	2,683

2– Si l'on s'en réfère à Archimède, c'est Aristarque de Samos (vers 310-230 av. J.-C.) qui aurait mis à mal la théorie géocentrique en émettant l'hypothèse que d'une part, c'était la Terre qui tournait autour du Soleil et que d'autre part, notre planète était également en rotation sur elle-même. Il ne fut guère écouté et la Terre resta au centre de l'univers conformément aux théories de Platon et de son disciple Aristote pour lesquels en outre le mouvement des corps célestes ne pouvait être que circulaire et uniforme. Le système de Ptolémée n'avait pas vocation à remettre en cause le point de vue de ces philosophes : il voulait mieux rendre compte de l'observation et améliorer les prédictions. Dans son ouvrage majeur, L'Almageste, Ptolémée (environ 90-168 après J.-C.) explique comment les Astres – le Soleil, la Lune et les cinq planètes connues à l'époque – tournaient chacun sur un petit cercle, l'**épicycle**, dont le centre décrivait le cercle principal, ou **déférent** ; chacun des déférents était décentré par rapport à la Terre, et d'autres complications venaient s'ajouter comme l'introduction des **équants**...

Il a fallu attendre quatorze siècles, avec l'arrivée du chanoine polonais Nicolas Copernic (1473-1543), pour que l'hypothèse de l'héliocentrisme réapparaisse avec force ; toutefois, le mouvement des planètes restait circulaire et Copernic eut recours aux épicycles afin d'ajuster l'excentricité de chacune des orbites.

Chapitre 4

Mouvement dans le repère de Frenet

Ce chapitre est à bien des égards le dual du précédent. On y considère le point matériel se déplaçant sur sa trajectoire plane dont on précise le rayon de courbure en un point donné. Le mouvement du mobile sera en particulier caractérisé par les composantes tangentielle et normale de son accélération ; et nous retrouverons les conditions pour une accélération centrale inversement proportionnelle au carré de la distance.

Afin de satisfaire notre curiosité et de s'échapper un instant des trajectoires elliptiques, deux exercices nous feront découvrir des trajectoires en forme de spirale pour des forces d'attractions qui, n'obéissant ni à Hooke ni à Newton, seraient inversement proportionnelles au cube de la distance.

1 Détermination du repère de Frenet

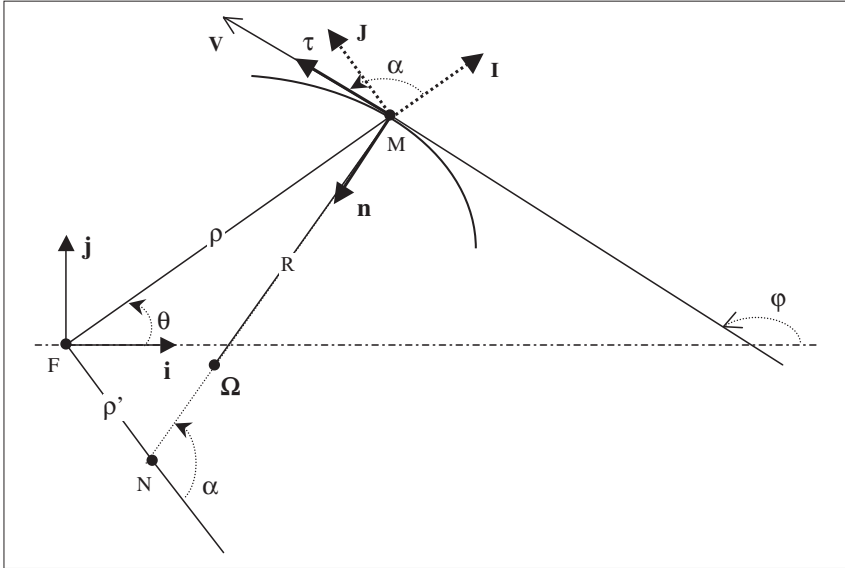


Figure 4.1 Repère de Frenet et rayon de courbure.

Jean-Frédéric Frenet (1816-1900), mathématicien français, eut l'idée d'étudier les courbes gauches à partir d'un repère mobile s'appuyant sur celles-ci.

Le repère de Frenet $\{M, \vec{\tau}, \vec{n}\}$ représenté à la figure 4.1 est défini comme suit :

- M est un point de la trajectoire dont la position dépend du temps, ce qui implique le choix d'un repère temps pour $M(t)$.
- Le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{V}$ en M et de même sens. Pour un accroissement infinitésimal dt du temps, M se déplace en M' de ds ; on en tire :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{FM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{FM}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \dot{\theta} \frac{d\overrightarrow{FM}}{ds}$$

Or,

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}, \text{ soit } \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$$

d'où

→ la définition de $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \frac{d\overrightarrow{FM}}{ds}$$

→ la relation entre $\vec{V}$ et $\vec{\tau}$: $\vec{V} = V \vec{\tau}$; $V = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \dot{\theta}$

- Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{\tau}$ et orienté comme la concavité de la trajectoire en M.

On écrit, compte tenu de $\phi = (\vec{i}, \vec{V})$,

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{d\varphi}$$

Posant $R = \frac{ds}{d\varphi}$ il vient :

$$\vec{n} = R \frac{d\vec{\tau}}{ds} \quad \text{soit :} \quad \vec{n} = R \frac{d^2 \vec{FM}}{ds^2}$$

2 Rayon de courbure

2.1 Définition

La grandeur

$$R = \frac{ds}{d\varphi}$$

introduite ci-dessus est par définition le **rayon de courbure** en M.

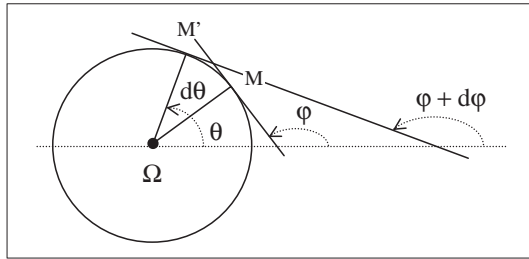


Figure 4.2 Rayon de courbure du cercle.

On peut appliquer cette définition au cercle.

Comme le montre la figure 4.2,

$$\varphi = \theta + \pi/2 \quad \text{et} \quad \varphi + d\varphi = \theta + d\theta + \pi/2$$

d'où

$$d\varphi = d\theta$$

et

$$R = \frac{ds}{d\theta}$$

C'est le rayon du cercle !

Il convient de préciser le **centre de courbure** Ω .

Le point Ω situé sur la perpendiculaire en M (voir figure 4.1) est tel que :

$$\overrightarrow{M\Omega} = R\vec{n}$$

d'où

$$\overrightarrow{F\Omega} = \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{M\Omega} = \rho\vec{I} + R\vec{n}$$

À titre indicatif, l'expression dans la base $\{\vec{I}, \vec{J}\}$ se déduit en notant que

$$\vec{n} = -\sin\alpha\vec{I} + \cos\alpha\vec{J} \quad \text{avec} \quad \tan\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$$

Afin d'accéder à la trajectoire $\Omega(\theta)$ on passera par exemple de la base $\{\vec{I}, \vec{J}\}$ à la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

2.2 Expressions

■ Calcul de $R(\rho, \rho', \rho'')$

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \frac{d\theta}{d\varphi}$$

$$\text{or } \varphi = \theta + \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{d\alpha}{d\theta}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{\rho'} \quad \rightarrow \quad (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}$$

(on a dérivé la tangente par rapport à θ)

En conséquence,

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2} \frac{1}{1 + \rho^2 / \rho'^2} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$$

et

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$$

Le rayon de courbure a donc pour expression :

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

■ Expression dans le cas où la trajectoire est une conique, $\rho = p/(1 + e \cos \theta)$

On calcule :

$$\rho' = \rho \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} = \rho^2 \frac{e \sin \theta}{p}$$

$$\rho'' = 2\rho\rho' \frac{e \sin \theta}{p} + \rho^2 \frac{e \cos \theta}{p}$$

On exprime le dénominateur :

$$\begin{aligned} \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' &= \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} + \frac{2p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{e^2 \sin^2 \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \\ &- 2 \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{p}{(1 + e \cos \theta)} \frac{e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)} \frac{e \sin \theta}{p} - \frac{p^3}{(1 + e \cos \theta)^3} \frac{e \cos \theta}{p} \end{aligned}$$

soit, après réduction,

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^3}$$

On exprime le numérateur :

$$\begin{aligned}\rho^2 + \rho'^2 &= \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} + \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{e^2 \sin^2 \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \\ &= \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^4} (1 + e^2 + 2e \cos \theta) \\ (\rho^2 + \rho'^2)^{3/2} &= \frac{p^3}{(1 + e \cos \theta)^6} (1 + e^2 + 2e \cos \theta)^{3/2}\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression du rayon de courbure de la conique en fonction de l'angle θ :

$$R = p \frac{(1 + e^2 + 2e \cos \theta)^{3/2}}{(1 + e \cos \theta)^3}$$

➤ Remarques

1- On a établi au chapitre précédant que $V = \frac{C}{p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}$

On en déduit :

$$R = \frac{\rho^3}{p^2} \frac{p^3}{C^3} V^3 \quad \text{avec} \quad p = \frac{C^2}{\mu}$$

On retient :

$$R = \frac{p}{C^3} \rho^3 V^3 = \frac{p}{\sin^3 \alpha} = \frac{1}{\mu C} \rho^3 V^3$$

2- Donnons trois valeurs particulières (voir chapitre 3, paragraphe 4.1) :

Point A :

Pour $\theta = 0$ $\alpha = \pi/2$ $R(\varphi = \pi/2) = p = b^2/a$ (signe – pour hyperbole)

Point P :

Pour $\theta = \pi/2$ $\operatorname{tg} \alpha = 1/e$ $R(\operatorname{tg} \varphi = -e) = p(1 + e^2)^{3/2}$

Point B :

Pour $\varphi = \pi$ $\cos \theta = -e$ $R(\varphi = \pi) = \frac{p}{(1 - e^2)^{3/2}} = a^2/b$

3 Accélération, composantes et module

3.1 Expressions générales

Partant de l'expression du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{FM}}{dt} = \frac{d\vec{FM}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = V \vec{\tau}$$

Nous obtenons l'accélération en dérivant par rapport au temps :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Or,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{n} \frac{1}{R} V$$

Ainsi :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{V^2}{R} \vec{n}$$

On pose

$$\Gamma_{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad \Gamma_n = \frac{V^2}{R} \quad \rightarrow \quad \vec{\Gamma} = \Gamma_{\tau} \vec{\tau} + \Gamma_n \vec{n}$$

$$\|\vec{\Gamma}\| = \Gamma = \sqrt{\Gamma_{\tau}^2 + \Gamma_n^2}$$

3.2 Composante tangentielle Γ_{τ}

Il s'agit de calculer la composante suivant $\vec{\tau}$.

$$\text{On a vu que } \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \dot{\theta}$$

$$\text{d'où } \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \left(\frac{d}{dt} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right) \dot{\theta} + \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \ddot{\theta}$$

Par conséquent :

$$\Gamma_{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\rho\rho' + \rho'\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \dot{\theta}^2 + \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \ddot{\theta}$$

■ Accélération tangentielle dans le cas du mouvement à accélération centrale

Nous utilisons simplement le fait que le mouvement obéit à la loi des aires.

$$\text{Dans cette hypothèse, } \dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{C}{\rho^2} \right) = \frac{C}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{C}{\rho^2} \right) = -2C^2 \frac{\rho'}{\rho^5}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= \frac{\rho\rho' + \rho'\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \frac{C^2}{\rho^4} + \frac{\rho^2 + \rho'^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \frac{-2C^2\rho'}{\rho^5} \\ &= \frac{C^2}{\rho^5 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} (\rho^2\rho' + \rho\rho'\rho'' - 2\rho^2\rho' - 2\rho'^3) \end{aligned}$$

La composante tangentielle s'écrit finalement :

$$\Gamma_{\tau} = -C^2 \frac{\rho'}{\rho^5 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')$$

■ *Cas où l'accélération centrale est en $1/\rho^2$, c'est-à-dire $\rho = p/1 + e \cos \theta$*

On a calculé au paragraphe précédent,

$$\rho' = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

$$(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') = \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^3}$$

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{p}{(1 + e \cos \theta)^2} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}$$

d'où

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -C^2 \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^3} \frac{(1 + e \cos \theta)^5}{p^5} \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}$$

ce qui après simplification donne :

$$\Gamma_{\tau} = -\frac{C^2 (1 + e \cos \theta)^2 e \sin \theta}{p^3 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}$$

3.3 Composante normale Γ_N

On calcule la composante de l'accélération suivant $\vec{n}$.

$$\Gamma_n = V^2/R, \text{ avec } V^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = (\rho^2 + \rho'^2) \dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

soit :

$$\Gamma_n = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \dot{\theta}^2$$

■ *Accélération normale dans le cas du mouvement à accélération centrale*

On utilise uniquement le fait que le mouvement obéit à la loi des aires.

On déduit immédiatement :

$$\Gamma_n = \frac{C^2}{\rho^4 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')$$

■ **Cas où l'accélération centrale est en $1/\rho^2$, c'est-à-dire $\rho = p/1 + e \cos \theta$**

$$\frac{V^2}{R} = C^2 \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^3} \frac{(1 + e \cos \theta)^4}{p^4} \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}$$

soit après simplification :

$$\Gamma_n = \frac{C^2}{p^3} \frac{(1 + e \cos \theta)^3}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}$$

3.4 Module et expressions vectorielles

■ **Module**

$$\Gamma = \|\vec{\Gamma}\| = \sqrt{\Gamma_\tau^2 + \Gamma_n^2}$$

On n'en déduit pas d'expression simple !

Cas du mouvement obéissant à la loi des aires

Des expressions de Γ_τ et Γ_n , on tire

$$\Gamma = \frac{C^2(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')}{\rho^5 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}$$

soit :

$$\Gamma = C^2 \frac{(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')}{\rho^5}$$

Cas où la trajectoire est une conique

$$\Gamma = C^2 \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^3} \frac{(1 + e \cos \theta)^5}{p^5} = \frac{C^2}{p} \left(\frac{1 + e \cos \theta}{p} \right)^2$$

Or, $\frac{C^2}{p} = \mu$, d'où :

$$\Gamma = \frac{\mu}{\rho^2}$$

Cela veut dire que si le mouvement obéit à la loi des aires, et que la trajectoire est une conique, alors l'accélération est en $1/\rho^2$.

■ **Expressions vectorielles**

Le mouvement satisfaisant toujours à la loi des aires, on peut aussi écrire, compte tenu de $\vec{\Gamma} = \Gamma_\tau \vec{\tau} + \Gamma_n \vec{n}$:

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \frac{C^2(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')}{\rho^5 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} (-\rho' \vec{\tau} + \rho \vec{n}) \\ &= \frac{C^2(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')}{\rho^4 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}^2} \left(-\frac{\rho'}{\rho} \vec{\tau} + \vec{n} \right) \end{aligned}$$

Or, on a vu que $\frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tg} \alpha$

ce qui permet de déduire :

$$\bar{\Gamma} = \frac{C^2}{\rho^4} \frac{(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \frac{1}{\sin \alpha} (-\cos \alpha \bar{\tau} + \sin \alpha \bar{n})$$

avec

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\rho}$$

D'où finalement :

$$\bar{\Gamma} = -\frac{C^2}{\rho^5} (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') (\cos \alpha \bar{\tau} - \sin \alpha \bar{n})$$

Écrivons maintenant $\bar{\Gamma}$ dans le repère $\{M, \bar{I}, \bar{J}\}$.

La matrice de passage de $\{M, \bar{I}, \bar{J}\}$ à $\{M, \bar{\tau}, \bar{n}\}$ est telle que

$$\begin{vmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{I} \\ \bar{J} \end{vmatrix}$$

On obtient donc :

$$\bar{\Gamma} = -\frac{C^2}{\rho^5} (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') \bar{I}$$

On démontre ainsi le théorème réciproque suivant :

Si un mouvement satisfait à la loi des aires, il est à accélération centrale ;

et, comme on vient de le voir :

Si en plus la trajectoire est une conique, alors le module de l'accélération est proportionnel à $1/\rho^2$, le coefficient étant $\mu = C^2/p$.

On retrouve également la deuxième formule de Binet :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= -\frac{C^2}{\rho^5} (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') = -\frac{C^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^3} \right) \\ &= -\frac{C^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \end{aligned}$$

exercices

E4-1 Accélération centrale de la forme $\vec{\Gamma} = -\frac{K}{\rho^3}\vec{I}$

1. Déterminer la trajectoire.
2. Que peut-on dire de l'angle du vecteur vitesse avec le rayon vecteur ? Donner les expressions de la vitesse et de ses composantes.
3. Calculer le rayon de courbure.
4. Établir les composantes de l'accélération dans le repère de Frenet.

solutions

1. Trajectoire

La formule de Binet relative à l'accélération permet d'écrire :

$$\frac{C^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) = \frac{K}{\rho^3} ; \text{ soit en isolant les constantes :}$$

$$\rho \left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) = \frac{K}{C^2}, \text{ puis, } \rho \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{K}{C^2} - 1$$

On pose $K' = \frac{K}{C^2} - 1$, et $u = \frac{1}{\rho}$;

d'où l'équation différentielle du second ordre :

$$u'' - K'u = 0,$$

dont la solution est du type $u(\theta) = Ae^{\alpha(\theta-\theta_0)}$

avec par identification $\alpha = \pm\sqrt{K'}$; $K > C^2$

Moyennant un choix convenable de l'axe polaire, la trajectoire a pour équation :

$$\rho = \rho_0 e^{\pm \frac{\sqrt{K-C^2}}{C} \theta}$$

La courbe représentative est une **spirale de Descartes**.

Pour la suite, on pose $\varepsilon = \pm 1$; $k = \sqrt{K'}$

$$\rightarrow \rho = \rho_0 e^{\varepsilon k \theta} \quad \rho' = \varepsilon k \rho \quad \rho'' = k^2 \rho$$

$\rightarrow$ Si $\varepsilon = +1$, on s'éloigne du pôle lorsque θ croît ;
si $\varepsilon = -1$, on se rapproche du pôle lorsque θ croît.

2. Vitesse

- Angle α avec le rayon vecteur :

$$\text{tg } \alpha = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{\varepsilon k} = \frac{\varepsilon}{k} \rightarrow \alpha = C^{\text{tte}}$$

On dit que « les rayons vecteurs sont coupés sous un angle constant ».

$$\varepsilon = +1 \rightarrow 0 < \alpha < \pi/2 \quad \varepsilon = -1 \rightarrow \pi/2 < \alpha < \pi$$

• Module et composantes :

$$\vec{V} = V\vec{\tau} = V_\rho\vec{I} + V_\theta\vec{J}$$

Le mouvement obéit à la loi des aires, donc $\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2}$; ainsi :

$$V = C\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{\rho'}{\rho^2}\right)^2} = C\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{k^2}{\rho^2}} = \frac{C}{\rho}\sqrt{1 + K'} \rightarrow V = \sqrt{K}\frac{1}{\rho}$$

$$V_\rho = \frac{C}{\rho}\frac{\rho'}{\rho} = \varepsilon k C \frac{1}{\rho} = \varepsilon \sqrt{K'} C \frac{1}{\rho} \rightarrow V_\rho = \varepsilon \sqrt{K - C^2} \frac{1}{\rho}$$

$$V_\theta = \frac{C}{\rho}$$

3. Rayon de courbure

$$\rho^2 = \rho_0^2 e^{2\varepsilon k \theta} \quad \rho'^2 = k^2 \rho^2 \rightarrow \rho^2 + \rho'^2 = \rho^2(1 + k^2) = \frac{K}{C^2} \rho^2$$

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \rho^2(1 + 2k^2 - k^2) = \rho^2(1 + k^2) = \frac{K}{C^2} \rho^2$$

On déduit :

$$R = \frac{\sqrt{K}}{C} \rho$$

4. Composantes de l'accélération dans le repère de Frenet

$$\vec{\Gamma} = \Gamma_\tau\vec{\tau} + \Gamma_n\vec{n}$$

• Accélération tangentielle

$$\Gamma_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = -C^2 \frac{1}{\rho^4} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = -\frac{C^2}{\rho^4} \varepsilon k \frac{K / C^2}{\sqrt{K} / C} \rho$$

$$\Gamma_\tau = -\varepsilon \sqrt{K} \sqrt{K - C^2} \frac{1}{\rho^3}$$

• Accélération normale

$$\Gamma_n = \frac{V^2}{R} = C^2 \frac{1}{\rho^4} \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{C^2}{\rho^4} \frac{\sqrt{K}}{C} \rho$$

$$\Gamma_n = \frac{C\sqrt{K}}{\rho^3}$$

On vérifie que $\|\vec{\Gamma}\| = \frac{K}{\rho^3}$

E4-2 Cas particulier : accélération centrale de la forme $\vec{\Gamma} = -\frac{C^2}{\rho^3} \vec{I}$

1. Déterminer la trajectoire, la tracer ; on précisera les asymptotes ainsi que la sous-normale et la sous-tangente.
2. Donner les expressions de la vitesse et de ses composantes.
3. Calculer le rayon de courbure et établir les composantes de l'accélération dans le repère de Frenet.

solutions

1. Trajectoire

Dans ce cas particulier où $K = C^2$, la formule de Binet relative à l'accélération conduit à :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0$$

On retient la solution $\frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{A}$, soit $\rho = \frac{A}{\theta}$

Il s'agit d'une **spirale hyperbolique** (figure 4.3) ;

quand $\theta \rightarrow \infty$ $\rho \rightarrow 0$ (point asymptotique) ;

quand $\theta \rightarrow 0$ $\rho \rightarrow \infty$ et $\rho \sin \theta \rightarrow A$ (ordonnée de l'asymptote horizontale).

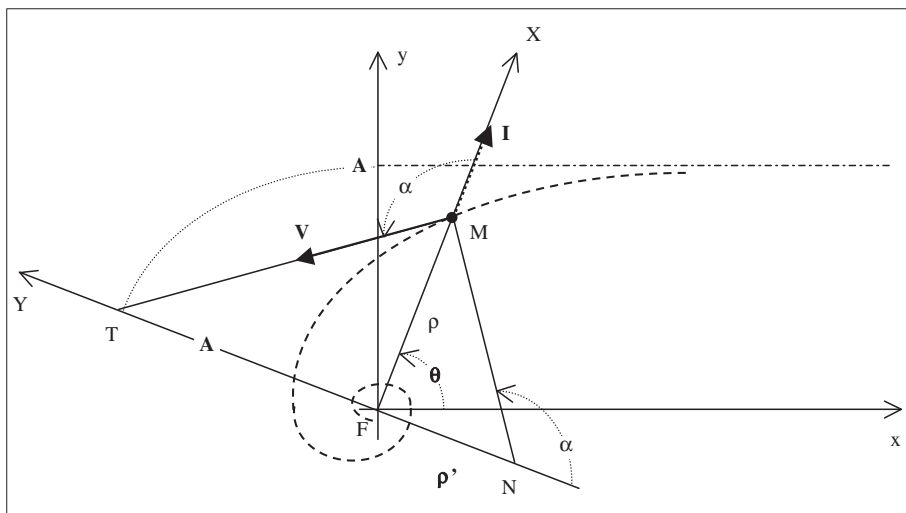


Figure 4.3 Spirale hyperbolique.

- Sous-normale n, sous-tangente t :

M est un point de la spirale, le rayon FM est porté par l'axe FX. La perpendiculaire à FX est FY ; la tangente en M coupe cet axe en T, la perpendiculaire en M le coupe en N.

– Calcul de $n = \overline{FN}$

$$\overline{MN} = -\rho\vec{I} + n\vec{J}, \text{ et un vecteur tangent est } \vec{T} = \frac{1}{\theta}\vec{V} = \rho'\vec{I} + \rho\vec{J}$$

On déduit :

$$\vec{T} \cdot \overline{MN} = 0 \rightarrow -\rho\rho' + n\rho = 0 \rightarrow n = \rho', \rho' = -\frac{A}{\theta^2} = -\frac{\rho}{\theta} = -\frac{\rho^2}{A}$$

– Calcul de $t = \overline{FT}$

Considérant les triangles FTM et FMN, il vient :

$$t = -\frac{\rho^2}{\rho'} = A$$

La sous-tangente à la spirale hyperbolique est égale à la constante d'intégration.

2. Vitesse

$$V = C\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{\rho'^2}{\rho^4}} = C\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{A^2}} = \frac{C}{\rho}\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{A^2}}$$

$$V_\rho = C\frac{\rho'}{\rho^2} = -\frac{C}{A} \rightarrow \text{La vitesse radiale est constante.}$$

$$V_\theta = \frac{C}{\rho}$$

3. Rayon de courbure R

$$\rho^2 + \rho'^2 = \rho^2(1 + \rho'^2 / A^2) \text{ et } \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \rho^2$$

d'où :

$$R = \rho \left(1 + \frac{\rho'^2}{A^2} \right)^{3/2}$$

• Accélération

$$\Gamma_\tau = \frac{C^2}{A} \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho'^2 / A^2}}, \quad \Gamma_n = C^2 \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho'^2 / A^2}}$$

➤ Remarque

Nous avons noté au chapitre introductif que de nombreuses galaxies possédaient des bras spiraux. La rotation d'étoiles et de matière interstellaire autour d'un centre galactique peut en effet générer des zones à forte densité en forme de spirale.

Chapitre 5

Anomalie et orbite

L'astre, dont la trajectoire est une ellipse, est localisé par son anomalie vraie ou excentrique. Nous montrons que l'équation de Kepler permet par exemple de connaître le temps du passage en un point donné de cette trajectoire et nous établissons des jeux de relations entre anomalies. L'étude paramétrique de l'ellipse à partir de l'anomalie excentrique offre ensuite la possibilité de préciser aisément la tangente, la normale, le cercle osculateur en ce point.

Nous appliquons dans le premier exercice l'équation de Kepler à la comète de Halley venue nous rendre visite au début de l'année 1986, afin de connaître la date de son passage en certains points. À partir de cette même équation, nous calculons dans le deuxième exercice la durée et la date des saisons. Enfin, avec le dernier exercice, nous démontrons que la normale en un point de la trajectoire elliptique est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs d'origine chacun des deux foyers, et calculons cet angle.

1 Anomalies

1.1 Temps du passage

On se propose de déterminer le temps t à partir du passage au périhélie en fonction de l'anomalie excentrique ϕ .

■ Définitions

Kepler en est à l'origine. On considère une planète P d'orbite une ellipse dont le foyer F est par exemple le Soleil.

On se réfère à la figure 5.1 ci-dessous.

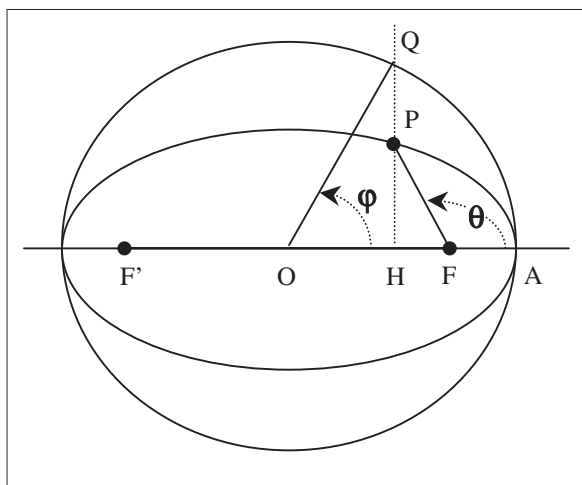


Figure 5.1 Anomalies vraie et excentrique.

- Le **cercle principal** (ou auxiliaire) est le cercle de centre le centre O l'ellipse, de rayon son demi-grand axe OA ; A correspondant au périhélie.
- L'**anomalie vraie** θ ou v est l'angle (FA, FP) ; F est le foyer positionné entre O et A .
- L'**anomalie excentrique** ϕ ou E est l'angle (OA, OQ) ; Q étant la projection orthogonale de P sur le cercle.
- Le **moyen mouvement** n est la vitesse angulaire moyenne ω_m du mouvement elliptique de période T :

$$n = \omega_m = 2\pi/T$$

- L'anomalie excentrique moyenne, ou simplement **anomalie moyenne** M , est l'angle ϕ_m parcouru à la vitesse moyenne ω_m pendant le temps t :

$$M = \phi_m = \omega_m t$$

- L'anomalie vraie moyenne θ_m correspondrait à l'angle (FA, FP_m) lorsque Q_m se déplace sur le cercle principal à la vitesse angulaire constante ω_m .

■ Équation de Kepler

Sachant que l'aire de l'ellipse est πab (voir chapitre 8, paragraphe 2.2), la loi des aires permet d'écrire :

$$\frac{\text{Aire}(\text{AFP})}{t} = \frac{\pi ab}{T}$$

Or,

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\text{AFP}) &= \frac{b}{a} \text{Aire}(\text{AFQ}) = \frac{b}{a} [\text{Aire}(\text{AOQ}) - \text{Aire}(\text{FOQ})] \\ &= \frac{b}{a} \frac{1}{2} (a^2 \varphi - ca \sin \varphi) \\ &= \frac{ab}{2} (\varphi - e \sin \varphi)\end{aligned}$$

On obtient l'équation de Kepler :

$$\varphi - e \sin \varphi = \omega_m t = M$$

conduisant à :

$$t = \frac{\varphi - e \sin \varphi}{2\pi} T$$

1.2 Relations entre anomalies vraie et excentrique

■ Rayons ρ et ρ'

Dans un premier temps établissons les expressions des rayons $\rho = \text{FP}$ et $\rho' = \text{F'P}$ en fonction de φ (ici, ρ' n'est pas la dérivée par rapport à θ !).

Par définition, $\text{F'P} + \text{FP} = 2a$; $\text{F'P}^2 = \text{F'H}^2 + \text{HP}^2$

$$\text{FP}^2 = \text{FH}^2 + \text{HP}^2$$

d'où :

$$\text{F'P}^2 - \text{FP}^2 = \text{F'H}^2 - \text{FH}^2 = (\text{F'H} + \text{FH})(\text{F'H} - \text{FH}) = 2c2OH$$

soit :

$$(\text{F'P} + \text{FP})(\text{F'P} - \text{FP}) = 4ac \cos \varphi$$

Du système

$$| \text{F'P} + \text{FP} = 2a$$

$$| \text{F'P} - \text{FP} = 2c \cos \varphi$$

on déduit :

$$| \rho = a - c \cos \varphi \rightarrow \rho = a(1 - e \cos \varphi)$$

$$| \rho' = a + c \cos \varphi \rightarrow \rho' = a(1 + e \cos \varphi)$$

■ Relations trigonométriques liant θ et φ

Partant de l'équation polaire de l'ellipse, on écrit :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a(1 - e \cos \varphi)$$

d'où :

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\cos \varphi - e}{1 - e \cos \varphi} & \sin \theta &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \varphi}{1 - e \cos \varphi} \\ \cos \varphi &= \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} & \sin \varphi &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}\end{aligned}$$

Donnons également des relations entre les angles moitiés.

Partant des égalités :

$$\begin{aligned}2 \cos^2 \frac{\theta}{2} &= 1 + \cos \theta = \frac{(1 - e)(1 + \cos \varphi)}{1 - e \cos \varphi} = \frac{1 - e}{1 - e \cos \varphi} 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} &= 1 - \cos \theta = \frac{(1 + e)(1 - \cos \varphi)}{1 - e \cos \varphi} = \frac{1 + e}{1 - e \cos \varphi} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\end{aligned}$$

on écrit :

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1 - e} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - e \cos \varphi}} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1 + e} \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - e \cos \varphi}}$$

Les tangentes des demi-anomalies sont ainsi liées par un coefficient de proportionnalité, simple fonction de l'excentricité :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

En conclusion, les formules permettent de traiter deux types de problèmes : soit, connaissant l'anomalie vraie, en déduire le temps écoulé depuis le passage au péricentre ; soit, connaissant le temps écoulé, en déduire l'anomalie vraie. La grandeur intermédiaire est dans les deux cas l'anomalie excentrique.

■ Application à l'expression de la vitesse et de l'accélération

On note que :

$$\begin{aligned}1 + e^2 + 2e \cos \theta &= (1 - e^2) \frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi} \\ 1 + e \cos \theta &= \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \varphi} \\ \frac{C}{p} &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\end{aligned}$$

On en tire :

- l'expression du module de la vitesse et de ses composantes en fonction de φ :

$$V = \frac{C}{p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta} \quad \rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi}}$$

$$V_p = \frac{C}{p} e \sin \theta \quad \rightarrow \quad V_p = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{e \sin \varphi}{1 - e \cos \varphi}$$

$$V_\theta = \frac{C}{p} (1 + e \cos \theta) \quad \rightarrow \quad V_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e \sin \varphi}$$

- l'expression de l'accélération centrale en fonction de φ :

$$\Gamma = -\frac{\mu}{p^2} (1 + e \cos \theta)^2 \quad \rightarrow \quad \Gamma = -\frac{\mu}{a^2} \frac{1}{(1 - e \cos \varphi)^2}$$

2 Paramétrage avec l'anomalie excentrique

2.1 Caractérisation paramétrique de l'ellipse

■ Coordonnées en fonction du paramètre φ

La base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ du repère $\{O, x, y\}$ choisi est telle que $\vec{i}$ est le vecteur unitaire porté par le demi grand axe $\overline{OA}$ (axe Ox), $\vec{j}$ le vecteur unitaire porté par le demi petit axe $\overline{OB}$ (axe Oy).

Les coordonnées d'un point P , sont celles du vecteur $\overline{OP}$:

$$\overline{OP}(\varphi) \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$$

($a \sin \varphi$ multiplié par le rapport d'affinité b/a)

Calculons de suite :

$$\frac{d\overline{OP}}{d\varphi} \begin{cases} x' = -a \sin \varphi \\ y' = b \cos \varphi \end{cases}; \quad \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

■ Vecteur tangent unitaire $\vec{\tau}$ et équation de la normale en P

$$\vec{\tau} = \frac{d\overline{OP}}{ds} = \frac{d\overline{OP}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds}$$

α étant l'angle $(\vec{i}, \vec{\tau})$, les coordonnées sont

$$\cos \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

On retient :

$$\vec{\tau} \left| \begin{array}{l} \frac{-a \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \\ \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \end{array} \right.$$

L'équation de la normale (N) en $P(x_p, y_p)$ se déduit simplement en écrivant que, $M(x, y)$ étant un point courant de (N), les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\overline{PM}$ sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} \overline{PM} \vec{\tau} = 0 &\rightarrow (x - x_p) \cos \alpha + (y - y_p) \sin \alpha = 0 \\ &\rightarrow (x - a \cos \varphi) \frac{-a \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \\ &\quad + (y - b \sin \varphi) \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = 0 \end{aligned}$$

et comme, $c^2 = a^2 - b^2$, la normale a pour équation :

$$-a \sin \varphi x + b \cos \varphi y + c^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

- pour $\varphi = 0 \rightarrow y = 0$ (axe des x)
- pour $\varphi = \pi/2 \rightarrow x = 0$ (axe des y)

On peut choisir comme vecteur normal $\vec{n}_n$, et comme vecteur colinéaire $\vec{\tau}_n$ à la normale :

$$\vec{n}_n (-a \sin \varphi, b \cos \varphi) ; \vec{\tau}_n (b \cos \varphi, a \sin \varphi)$$

■ Vecteur normal unitaire $\vec{n}$ et équation de la tangente en P

Les coordonnées de la normale sont :

$$\vec{n} \left| \begin{array}{l} \cos(\alpha + \pi / 2) = -\sin \alpha = \frac{-b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \\ \sin(\alpha + \pi / 2) = \cos \alpha = \frac{-a \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \end{array} \right.$$

L'équation de la tangente (T) en $P(x_p, y_p)$ se déduit en écrivant que, $M(x, y)$ étant un point courant de (T), les vecteurs $\vec{n}$ et $\overline{PM}$ sont orthogonaux :

$$\overline{PM} \vec{n} = 0 \rightarrow (x - x_p)(-\sin \alpha) + (y - y_p) \cos \alpha = 0$$

$$\rightarrow (x - a \cos \varphi) \frac{-b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} + (y - b \sin \varphi) \frac{-a \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = 0$$

La tangente a pour équation :

$$b \cos \varphi x + a \sin \varphi y - ab = 0$$

- pour $\varphi = 0 \rightarrow x = a$ (droite parallèle à l'axe des y)
- pour $\varphi = \pi/2 \rightarrow y = b$ (droite parallèle à l'axe des x)

On peut choisir comme vecteur normal $\vec{n}_t$, et comme vecteur colinéaire $\vec{\tau}_t$ à la tangente :

$$\vec{n}_t (b \cos \varphi, a \sin \varphi) ; \quad \vec{\tau}_t (-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$$

■ Construction géométrique de la tangente et de la normale

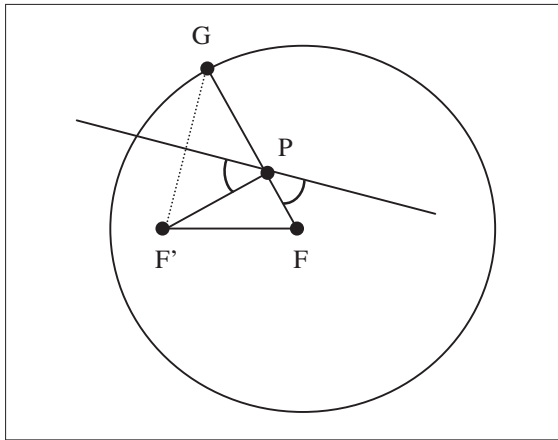


Figure 5.2 Construction de la tangente à l'ellipse.

La figure 5.2 ci-dessus représente une méthode simple pour construire la tangente à l'ellipse en un point repéré par l'anomalie vraie. Les deux foyers étant positionnés, on trace le cercle de centre F et de rayon le grand axe, soit $2a$. Le prolongement du rayon vecteur correspondant à θ coupe le cercle en G, et la médiatrice du segment F'G est la tangente à l'ellipse. L'intersection de la médiatrice avec FG est le point P de tangence.

La démonstration découle de ce que $F'P = GP$, avec $GP + PF = 2a$. D'autre part, compte tenu de l'égalité des angles de F'P et FP avec la médiatrice, celle-ci est bien la tangente en P (voir exercice E5-3). La normale en P est obtenue directement en menant de P la parallèle à F'G.

➤ Remarques

1– La construction géométrique montre que l'ellipse est la courbe **enveloppe** des médiatrices de $F'G$, où F' est à l'intérieur du cercle, obtenue lorsque le point G a décrit le cercle. Si F' était à l'extérieur du cercle, la courbe enveloppe serait l'hyperbole.

2– Considérons maintenant la normale en P . La courbe enveloppée par celle-ci lorsque G décrit le cercle est la **développée** de l'ellipse ; c'est une astroïde. On dit aussi que l'ellipse est la développante !

Il y a ainsi deux définitions pour la développée d'une courbe ; à savoir *lieu des centres de courbure* (voir paragraphe 2.2), ou bien *enveloppe des normales*.

■ Rayon de courbure

Rappelons que α est ici l'angle $(\vec{i}, \vec{\tau})$.

Par définition le rayon de courbure est $R = \frac{ds}{d\alpha}$

On introduit la différentielle $d\phi$ de l'anomalie excentrique ; ainsi :

$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{ds}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\phi}$$

et en dérivant $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{y'}{x'} \rightarrow (1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{d\phi} = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^2} \rightarrow \frac{d\alpha}{d\phi} = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^2 + y'^2}$$

Or

$$R = \frac{ds}{d\phi} \frac{d\phi}{d\alpha} \quad \text{avec} \quad \frac{ds}{d\phi} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Le rayon de courbure a donc pour expression :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x' y'' - y' x''}$$

ce qui pour l'ellipse conduit à :

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}{ab}$$

soit encore, en fonction uniquement du cosinus de l'anomalie excentrique :

$$R = \frac{a^2}{b} (1 - e^2 \cos^2 \phi)^{3/2}$$

Au paragraphe suivant nous allons déterminer le lieu du centre de courbure Ω en fonction du paramètre ϕ .

2.2- Équation paramétrique de la développée

P étant un point courant de l'ellipse, on a la relation vectorielle :

$$\overline{O\Omega} = \overline{OP} + \overline{P\Omega} = \overline{OP} + R\vec{n}$$

Les coordonnées (x_d, y_d) de la développée sont :

$$\left| \begin{aligned} x_d &= x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} y' = a \cos \varphi - \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{ab} b \cos \varphi \\ y_d &= y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} x' = b \sin \varphi - \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{ab} a \sin \varphi \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\overline{O\Omega}(\varphi) = \left| \begin{aligned} x_d &= +\frac{c^2}{a} \cos^3 \varphi \\ y_d &= -\frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation paramétrique d'une **astroïde**, représentée à la figure 5.3.

Donnons deux valeurs particulières :

- $\varphi = 0$ $\overline{O\Omega}(0) = (\frac{c^2}{a}, 0)$, le point représentatif est A_d ;
- $\varphi = \pi/2$ $\overline{O\Omega}(\pi/2) = (0, -\frac{c^2}{b})$, le point représentatif est B_d .

Pour $\varphi = 0$, le rayon de courbure est : $R(0) = OA - OA_d = \frac{b^2}{a}$

Pour $\varphi = \pi/2$, le rayon de courbure est : $R(\pi/2) = B_dO + OB = \frac{a^2}{b}$

La moyenne géométrique des rayons de courbure en A et en B est égale à $\sqrt{ab}$, c'est-à-dire ρ_m (voir chapitre 2, paragraphe 1.2).

Pour la Terre :

$$R(0) = 0,999\,722 \text{ ua}$$

$$R(\pi/2) = 1,000\,141 \text{ ua}$$

$$\rho_m = 0,999\,931 \text{ ua}$$

Les points A_d et B_d sont positionnés sur la figure à l'aide d'une construction géométrique simple :

Q est le premier sommet du rectangle tangent à l'ellipse en A et B ; de ce point, on trace la perpendiculaire au segment AB qui coupe l'axe des x en A_d et l'axe des y en B_d .

En effet,

- les triangles A_dAQ et AQB étant semblables $\rightarrow \frac{A_dA}{AQ} = \frac{AQ}{QB} \rightarrow A_dA = \frac{b^2}{a}$
- les triangles B_dBQ et BQA étant semblables $\rightarrow \frac{B_dB}{BQ} = \frac{BQ}{QA} \rightarrow B_dB = \frac{a^2}{b}$

La figure 5.3 qui suit précise toutes les notations utilisées :

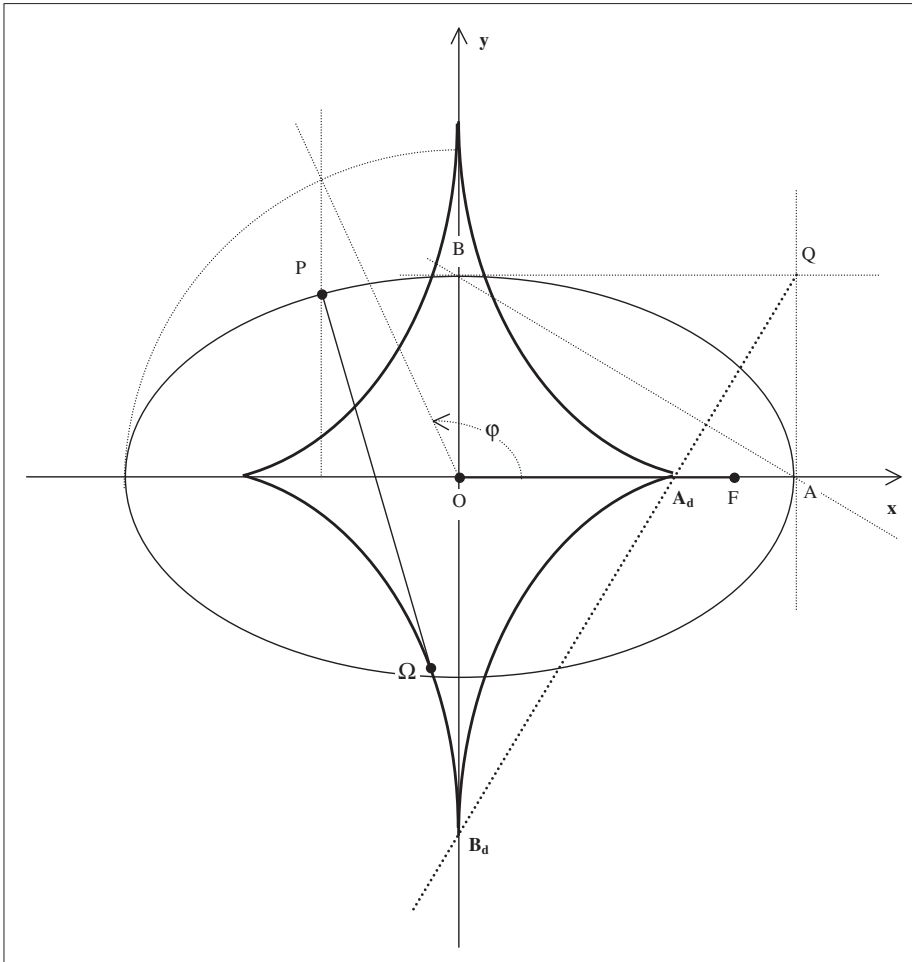


Figure 5.3 Développée de l'ellipse.

On vérifie que : $OA_d = ce < OF = ae$;

d'où, $OA_d / OF = e$

D'autre part : $A_d A = p$

Le rayon du **cercle osculateur** au point A (on dit plutôt surosculateur dans le cas présent) est donc égal au paramètre.

exercices

E5-1 Temps de l'intersection d'une comète avec l'écliptique

La trajectoire elliptique de la Comète de Halley coupe l'écliptique – plan de l'orbite terrestre – au point N_d (appelé nœud descendant).

1. Quel est le temps mis par la comète pour atteindre ce point après son passage au périhélie ? La date au périhélie étant le 9 février 1986 à 11 h 00 min 25 s, quelle est celle au nœud descendant ?
2. Calculer la vitesse au périhélie ainsi que le rayon et la vitesse au nœud descendant.
3. Calculer la constante des aires et les produits rayon-vitesse au périhélie et au nœud descendant ; conclure.
4. Déduire l'angle α_{Nd} du vecteur vitesse avec le rayon vecteur au point N_d , et calculer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse.
5. Calculer la date, le rayon vecteur et la vitesse de la comète au nœud ascendant N_a avant son passage au périhélie ; on précise que le Soleil appartient à la ligne des nœuds.

Données numériques :

- angle des rayons vecteurs au périhélie et à l'intersection de l'écliptique $\theta_{Nd} = 68^\circ, 153\,48$
- excentricité $e = 0,967\,277\,8$
- période sidérale $T_H = 76$ années
- rayon au périhélie $\rho_0 = 87,829\,116 \times 10^6$ km
- constante héliocentrique de la gravitation $\mu_s = 13,271\,244 \times 10^{10}$ km³s⁻².

solutions

1. Temps t_{Nd}

On connaît l'anomalie vraie θ_{Nd} comptée à partir de la position au périhélie ; on en déduit l'anomalie excentrique φ_{Nd} par la relation (chapitre 5, paragraphe 1.2) :

$$\sin \varphi_{Nd} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta_{Nd}}{1 + e \cos \theta_{Nd}} \rightarrow \sin \varphi_{Nd} = 0,173\,168$$

$$\varphi_{Nd} = 9^\circ,972\,046 = 0,174\,045 \text{ rd}$$

L'équation de Kepler conduit à :

$$t_{Nd} = (\varphi_{Nd} - e \sin \varphi_{Nd}) \frac{T_H}{2\pi} ; \text{ avec } T_H = 27\,759 \text{ jours (l'année est de } 365,25 \text{ jours)}$$

Par conséquent :

$$t_{Nd} = 28,91 \text{ jours} = 28 \text{ j } 21 \text{ h } 50 \text{ min } 30 \text{ s}$$

La date au nœud descendant est le 10 mars à 8 h 50 min 55 s (la précision est un peu illusoire).

2. Vitesse V_0 , rayon ρ_{Nd} et vitesse V_{Nd}

• ρ_0 et V_0

$$\rho_0 = 87,829 \ 116 \times 10^6 \text{ km} = 0,587 \ 101 \text{ ua}$$

On a établi (chapitre 3, paragraphe 3.1) que :

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_0}} \sqrt{1+e} \quad \text{d'où} \quad V_0 = 54,522 \text{ km/s}$$

• ρ_{Nd} et V_{Nd}

$$\rho_{Nd} = \frac{p}{1+e \cos \theta_{Nd}}$$

avec

$$p = \rho_0(1+e) \quad p = 172,784 \ 270 \times 10^6 \text{ km} = 1,154 \ 992 \text{ ua}$$

l'application numérique donne $\rho_{Nd} = 127,052 \ 401 \times 10^6 \text{ km} = 0,849 \ 293 \text{ ua}$

$$V_{Nd} = \sqrt{\frac{\mu_s}{p}} \sqrt{1+e^2+2e \cos \theta_{Nd}}$$

on calcule :

$$V_{Nd} = 45,163 \text{ km/s}$$

3. Constante des aires C_H , produits $\rho_0 V_0$ et $\rho_{Nd} V_{Nd}$

$$C_H = \sqrt{\mu_s p} \quad (\text{voir chapitre 3, paragraphe 2.3})$$

$$C_H = 4788,59 \times 10^6 \text{ km}^2/\text{s}$$

On calcule :

$$\rho_0 V_0 = 4788,59 \times 10^6 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$\rho_{Nd} V_{Nd} = 5738,01 \times 10^6 \text{ km}^2/\text{s}$$

Conclusion :

$$C_H = \rho_0 V_0 (= \rho_{\pi} V_{\pi}) \neq \rho_{Nd} V_{Nd}$$

(voir chapitre 3, paragraphe 4.2).

4. Angle α_{Nd} avec le rayon vecteur et composantes $V_{\rho Nd}$ et $V_{\theta Nd}$

• α_{Nd}

$$\sin \alpha_{Nd} = \frac{C_H}{\rho_{Nd} V_{Nd}} = 0,834 \ 539 \quad \alpha_{Nd} = 56^\circ,568$$

• $V_{\rho_{Nd}}$ et $V_{\theta_{Nd}}$

$$V_{\rho_{Nd}} = V_{Nd} \cos \alpha_{Nd} \rightarrow V_{\rho_{Nd}} = 24,882 \text{ km/s}$$

$$V_{\theta_{Nd}} = V_{Nd} \sin \alpha_{Nd} = C_H / \rho_{Nd} \quad V_{\theta_{Nd}} = 37,690 \text{ km/s}$$

5. Date, rayon ρ_{Na} et vitesse V_{Na}

L'anomalie vraie considérée est : $\theta_{Na} = \theta_{Nd} + 180^\circ = 248^\circ,153 \text{ } 48$

Il convient de prendre la bonne détermination de la fonction Arc sin. Les changements interviennent aux points B et B', intersections de l'ellipse avec son petit axe ; c'est-à-dire pour

$$\varphi = \pi/2 \quad \text{soit} \quad \theta_B = \text{Arc cos}(-e) \quad \text{et}$$

$$\varphi = 3\pi/2 \quad \text{soit} \quad \theta_{B'} = 2\pi - \text{Arc cos}(-e)$$

Ainsi, selon les valeurs de θ , la détermination à retenir est :

$$0 < \theta < \theta_B \rightarrow \text{Arc sin } \varphi$$

$$\theta_B < \theta < \theta_{B'} \rightarrow \pi - \text{Arc sin } \varphi$$

$$\theta_{B'} < \theta < 2\pi \rightarrow 2\pi + \text{Arc sin } \varphi$$

Dans le cas présent, $\theta_B = 165^\circ,302$ $\theta_{B'} = 194^\circ,698$ soit $\theta_{B'} < \theta_{Na} < 360^\circ$

• On déduit :

$$\sin \varphi_{Na} = -0,367 \text{ } 935, \quad \varphi_{Na} = 338^\circ,411 \text{ } 694 = 5,906 \text{ } 398 \text{ rd}$$

$$t_{Na} = 27 \text{ } 666,70 \text{ j}$$

Se plaçant une période avant, on obtient le temps du passage juste avant le périhélie

$$t_{Na} - T = -92,3 \text{ jours} = -92 \text{ j } 7 \text{ h } 12 \text{ min}$$

La date au nœud ascendant est le 9 novembre à 3 h 48 min 25 s (année 1985).

• ρ_{Na} et V_{Na}

$$\rho_{Na} = 269,952 \text{ } 197 \times 10^6 \text{ km} = 1,804 \text{ } 519 \text{ ua}$$

$$V_{Na} = 30,558 \text{ km/s}, \quad \alpha_{Na} = 144^\circ,515$$

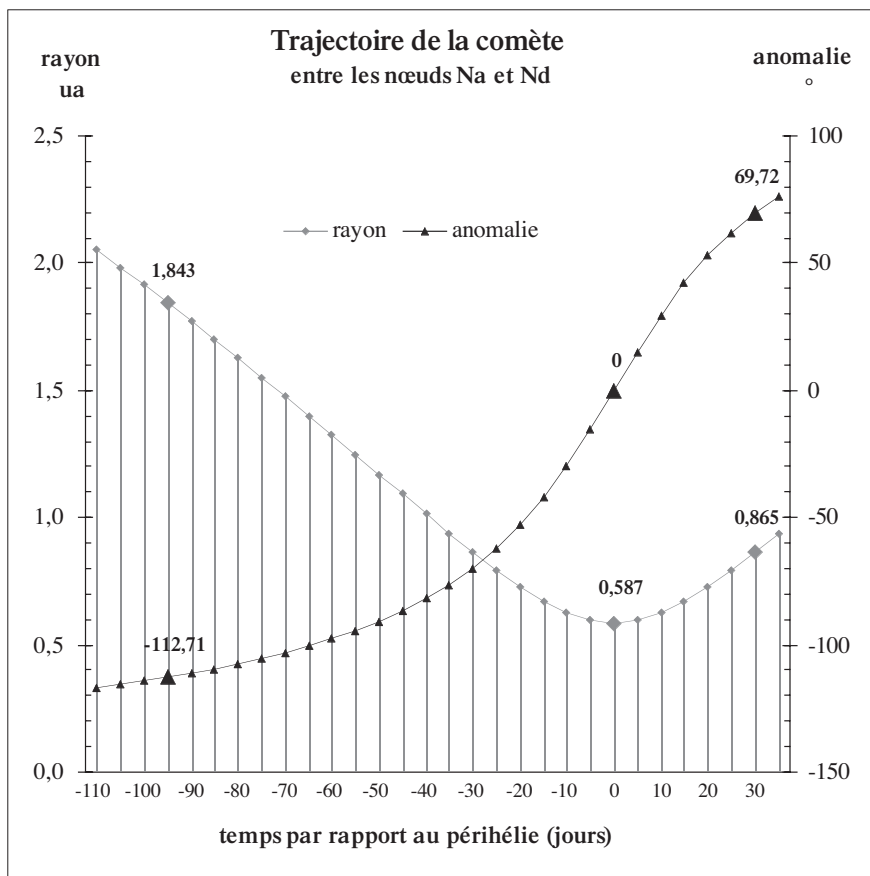
➤ Remarques

1- On pourra vérifier que $\frac{1}{\rho_{Nd}} + \frac{1}{\rho_{Na}} = \frac{2}{p}$, et plus généralement

$$\frac{1}{\rho(\theta)} + \frac{1}{\rho(\theta + \pi)} = \frac{2}{p}.$$

2- Les données fournies (e , T_H , ρ_0 et μ_S) sont redondantes ; on aurait pu par exemple se passer de la constante de la gravitation, mais on ne connaît pas encore la 3^e loi de Kepler objet du chapitre suivant...

3-



4- L'astronome Anglais Edmond Halley (1656-1742) nota que la comète observée en 1682 avait une orbite identique à celle des comètes vues en 1531 puis en 1607. Il conclut qu'il devait s'agir de la même comète et prédit le passage suivant en 1758. Il mourut avant, mais la comète réapparut à peu près comme prévu et on la baptisa de son nom.

Actuellement la période de la comète est de 76,03 ans ; elle était un peu plus élevée par le passé (79 ans à l'époque du passage en 1066). Il faut dire que la trajectoire est perturbée par Jupiter, Saturne et Uranus, ainsi que par la perte de masse au voisinage du Soleil.

Les dimensions en km du noyau de la comète sont $16 \times 8 \times 8$.

Le dernier passage de la comète a eu lieu en 1986. Le 14 mars de cette même année, la sonde européenne Giotto s'est approchée à quelques centaines de kilomètres du noyau. Cette sonde fut baptisée ainsi en hommage au peintre florentin Giotto di Bondone qui, subjugué par l'apparition de la comète en 1301, transforma l'étoile de Bethléem en une comète dorée

dans son tableau de l' « Adoration des Mages » exposé à la chapelle des Scrovegni de Padoue...



La mission Giotto fera l'objet de l'exercice E8-4.

Halley est une comète de courte période. On distingue en effet deux catégories principales de comètes : celles à longue période, dont l'aphélie se situe souvent à une distance de 50 000 ua correspondant au nuage de Oort (voir chapitre 1), et celles dont la période est inférieure à 200 années.

Les comètes de cette deuxième catégorie pourraient être des comètes à longue période qui auraient subi les forces gravitationnelles des grosses planètes ; l'autre hypothèse est qu'elles proviendraient de la ceinture de Kuiper située au voisinage de l'écliptique et qui s'étend de l'orbite de Neptune jusqu'à environ 100 ua.

Les comètes de courte période sont généralement regroupées en deux familles : celles de la famille de Jupiter, qui ne vont guère au-delà de cette planète et ont des orbites proches de l'écliptique, et celles de la famille de Halley.

Depuis 1995 la **nomenclature des comètes**, recommandée pour les désigner, est établie comme suit :

- la première lettre fait référence à la période (P pour courte et C pour longue ou non périodique), et si la comète a disparu on utilise la lettre D ;
- l'année de découverte vient ensuite ;
- elle est suivie d'une lettre représentant la quinzaine du mois de cette découverte (lettre A pour la première quinzaine de janvier, F pour la deuxième quinzaine de mars), sachant que le I n'est pas utilisé ;
- puis un nombre indique le rang de la découverte dans la quinzaine ;
- enfin, le nom du premier découvreur et éventuellement du deuxième peut être rajouté.

On a répertorié à ce jour pas moins de 1000 comètes, dont près de 200 sont de courte période et numérotées par ordre chronologique de découverte. Voici quelques exemples :

1P/Halley, la première de la liste !

2P/Encke, d'une période de seulement 3,30 années avec une excentricité de 0,847.

9P/Tempel 1, sur laquelle la sonde spatiale Deep Impact envoya un impacteur le 4/07/05.

109P/Swift-Tuttle, de période 133,28 ans, d'excentricité 0,964, d'inclinaison $113^{\circ},45$.

- C/1995 O1 Hale-Bopp, comète géante atteignant 50 km dans sa plus grande dimension.
- C/1996 B2 Hyakutake, passée à seulement 15 millions de km de la Terre en hiver 1996.
- Terminons sur D/Schoemaker-Levy 9, disloquée en juillet 92 puis disparue en 94 en se brisant sur Jupiter !

E5-2 Durée et date des saisons

La figure 5.4 ci-dessous représente l'orbite de la Terre dans un référentiel héliocentrique. La trajectoire est elliptique, et la ligne des apsides fait un angle θ_0 avec celle des solstices. D'autre part, ligne des équinoxes et ligne des solstices sont perpendiculaires.

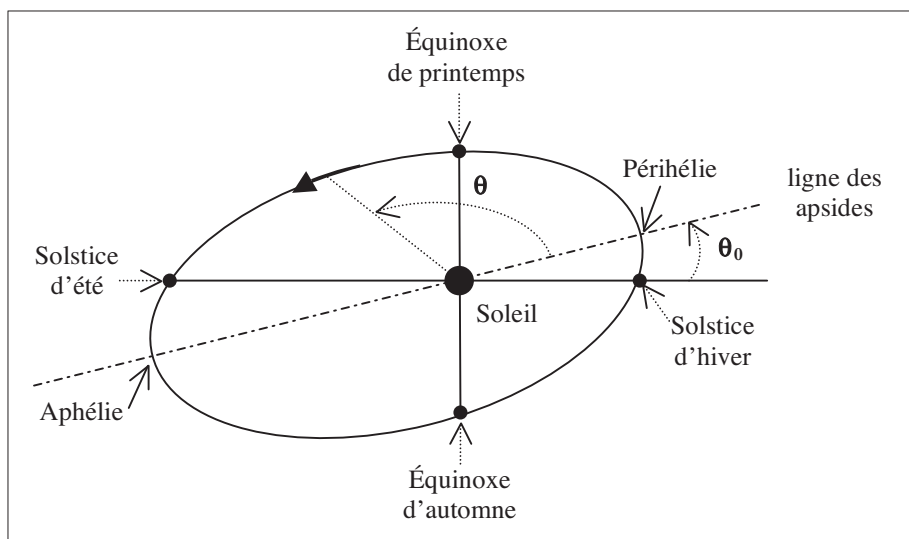


Figure 5.4 Orbite de la Terre.

1. Calculer

- a) la durée correspondant à θ_0 ;
- b) la durée des saisons.

2. Le passage au périhélie a eu lieu le 4 janvier 2000 à 00 h 10 min 04 s TU ; en déduire les dates de passage à l'équinoxe de printemps, au solstice d'été, à l'aphélie, à l'équinoxe d'automne, et au solstice d'hiver pour cette même année.

Données :

$$\theta_0 = 12^\circ 56' 15'' \quad \text{excentricité } e = 0,016\,709 \quad \text{Période } T = 365,2564 \text{ j.}$$



Date « moyenne » au périhélie, angle θ_0 et excentricité sont cohérents avec les éléments moyens fournis pour l'an 2000 au chapitre 11.

solutions

La résolution s'effectue à partir de :

– l'équation de Kepler donnant le temps en fonction de l'anomalie excentrique

$$t = (\varphi - e \sin \varphi) \frac{T}{2\pi}$$

– la relation entre anomalie excentrique et anomalie vraie

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

On s'aide d'un tableur, en utilisant la bonne détermination de la fonction Arc sin (voir exercice E5-1) selon les valeurs $\theta_B = \text{Arc cos}(-e) = 90^\circ,9574$ et $\theta_{B'} = 360^\circ - \theta_B = 269^\circ,0426$.

1.

a) Durée t_0 entre solstice d'hiver et périhélie

	$\theta = 360^\circ - 12^\circ,9375$	$\theta = 347^\circ,0625$
d'où	$\varphi = 347^\circ,275\ 124$	$\rightarrow t_a = 352,559\ 682\ \text{j}$
durée cherchée	$t_0 = 365,2564 - t_a$	$\rightarrow t_0 = 12,696\ 718\ \text{j}$

b) Durée des saisons

• L'hiver ; il correspond au temps entre solstice d'hiver et équinoxe de printemps.

La durée du périhélie à l'équinoxe de printemps correspond à une anomalie vraie

$$\theta = 90^\circ - \theta_0, \text{ soit } \theta = 77^\circ,0625 ;$$

on déduit :

$$\varphi = 76^\circ,131\ 145 \quad t_h = 76,299\ 728\ \text{j}$$

Il faut rajouter t_0 pour avoir la durée D_H de l'hiver : $D_H = 88,996\ \text{j}$

• Le printemps ; il correspond au temps entre équinoxe de printemps et solstice d'été.

La durée du périhélie au solstice d'été correspond à une anomalie vraie

$$\theta = 180^\circ - \theta_0, \text{ soit } \theta = 167^\circ,0625 ;$$

on déduit :

$$\varphi = 166^\circ,846\ 385 \quad t_p = 169,061\ 488\ \text{j}$$

Durée du printemps $D_p = t_p - t_h$, soit $D_p = 92,762\ \text{j}$

- L'été ; il correspond au temps entre solstice d'été et équinoxe d'automne.

La durée du périhélie à l'équinoxe d'automne correspond à une anomalie vraie

$$\theta = 270^\circ - \theta_0, \text{ soit } \theta = 257^\circ,0625 ;$$

on déduit :

$$\varphi = 257^\circ,997\,346 \quad t_e = 262,714\,492 \text{ j}$$

$$\text{Durée de l'été} \quad D_E = t_e - t_p \quad \text{soit} \quad D_E = 93,653 \text{ j}$$

- L'automne ; il correspond au temps entre équinoxe d'automne et solstice d'hiver.

La durée du périhélie au solstice d'hiver est de $t_a = 352,559\,682 \text{ j}$.

Par conséquent, la durée de l'automne est

$$D_A = t_a - t_e \quad \text{soit} \quad D_A = 89,845 \text{ j}$$

2. Dates TU (année 2000)

– au périhélie (donnée) $\rightarrow$ 4 janvier à 00 h 10 min
 $(t_{ph} = 3,006\,991 \text{ j depuis le } 1^{\text{er}} \text{ janvier à } 0 \text{ h})$

– à l'équinoxe de printemps ; la durée à partir du 1^{er} janvier est $t_{ph} + t_h$, soit

$$t_{ph} + t_h = 79,306\,719 \text{ j} \approx 79 \text{ j } 7 \text{ h } 22 \text{ min} \rightarrow \underline{20 \text{ mars à } 7 \text{ h } 22 \text{ min}}$$

– au solstice d'été ; la durée à partir du 1^{er} janvier est $t_{ph} + t_p$, soit

$$t_{ph} + t_p = 172,068\,479 \text{ j} \approx 172 \text{ j } 1 \text{ h } 39 \text{ min} \rightarrow \underline{21 \text{ juin à } 1 \text{ h } 39 \text{ min}}$$

– à l'aphélie, le temps écoulé depuis le 1^{er} janvier est $t_{ph} + T/2$, soit

$$t_{ph} + T/2 = 185,635\,191 \text{ j} \approx 185 \text{ j } 15 \text{ h } 15 \text{ min} \rightarrow \underline{4 \text{ juillet à } 15 \text{ h } 15 \text{ min}}$$

– à l'équinoxe d'automne ; la durée à partir du 1^{er} janvier est $t_{ph} + t_e$, soit

$$t_{ph} + t_e = 265,721\,483 \text{ j} \approx 265 \text{ j } 17 \text{ h } 19 \text{ min} \rightarrow \underline{22 \text{ septembre à } 17 \text{ h } 19 \text{ min}}$$

– au solstice d'hiver ; la durée à partir du 1^{er} janvier est $t_{ph} + t_a$, soit

$$t_{ph} + t_a = 355,566\,673 \text{ j} \approx 355 \text{ j } 13 \text{ h } 36 \text{ min} \rightarrow \underline{21 \text{ décembre à } 13 \text{ h } 36 \text{ min.}}$$

Nous savons que le point vernal rétrograde vers l'ouest, mais la ligne des apsides tourne également sous l'effet des perturbations planétaires : ainsi, en 1246 l'angle θ_0 était-il nul.

E5-3 Réflexion sur l'ellipse

1. Démontrer analytiquement que la normale en un point P de l'ellipse est la bissectrice de l'angle des foyers avec ce point. Exprimer la tangente du demi-angle en fonction de l'anomalie excentrique, puis en fonction de l'excentricité et de l'anomalie vraie.

2. Conclure en se référant à l'optique.

solutions

1. Points et vecteurs

$$P = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$$

$F = F_1 = (c, 0)$, $F' = F_{-1} = (-c, 0)$; on introduit $\varepsilon = \pm 1$, ce qui permet de regrouper : $F_\varepsilon = (\varepsilon c, 0)$

$$\overrightarrow{PF_\varepsilon} = (\varepsilon c - a \cos \varphi, -b \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PF_\varepsilon}\| &= \sqrt{\varepsilon^2 c^2 + a^2 \cos^2 \varphi - 2\varepsilon a c \cos \varphi + b^2 - b^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{a^2 - 2\varepsilon a c \cos \varphi + c^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

on tire :

$$\|\overrightarrow{PF_\varepsilon}\| = (a - \varepsilon c \cos \varphi)$$

$\vec{N} = (-b \cos \varphi, -a \sin \varphi)$, $\vec{N}$ est le vecteur normal choisi en P ;

$$\begin{aligned} \|\vec{N}\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{(a + c \cos \varphi)(a - c \cos \varphi)} \end{aligned}$$

Calcul des cosinus et sinus de l'angle $(\overrightarrow{PF_\varepsilon}, \vec{N})$

• Cosinus

On calcule $\overrightarrow{PF_\varepsilon} \cdot \vec{N} = -\varepsilon b c \cos \varphi + a b \cos^2 \varphi + a b \sin^2 \varphi = b(a - \varepsilon c \cos \varphi)$,
on déduit :

$$\cos(\overrightarrow{PF_\varepsilon}, \vec{N}) = \frac{\overrightarrow{PF_\varepsilon} \cdot \vec{N}}{\|\overrightarrow{PF_\varepsilon}\| \|\vec{N}\|} = \frac{b}{\sqrt{(a + c \cos \varphi)(a - c \cos \varphi)}}$$

• Sinus

On calcule le produit vectoriel de $\overrightarrow{PF_\varepsilon}$ et $\vec{N}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PF_\varepsilon} \wedge \vec{N} &= (-\varepsilon a c \sin \varphi + a^2 \sin \varphi \cos \varphi - b^2 \sin \varphi \cos \varphi) \vec{k} \\ &= (-\varepsilon a c \sin \varphi + \varepsilon^2 c^2 \sin \varphi \cos \varphi) \vec{k} \end{aligned}$$

d'où :

$$\overrightarrow{PF_\varepsilon} \wedge \vec{N} = -\varepsilon c \sin \varphi (a - \varepsilon c \cos \varphi) \vec{k}$$

et

$$\|\overrightarrow{PF_\varepsilon} \wedge \vec{N}\| = c |\sin \varphi| (a - \varepsilon c \cos \varphi)$$

on déduit

$$\sin(\overrightarrow{PF_\varepsilon}, \vec{N}) = \frac{\|\overrightarrow{PF_\varepsilon} \wedge \vec{N}\|}{\|\overrightarrow{PF_\varepsilon}\| \|\vec{N}\|} = \frac{c |\sin \varphi|}{\sqrt{(a + c \cos \varphi)(a - c \cos \varphi)}}$$

Calcul de la tangente de l'angle $(\overrightarrow{PF_\epsilon}, \vec{N})$

- En fonction de l'anomalie excentrique φ , on obtient immédiatement

$$\text{tg}(\overrightarrow{PF_\epsilon}, \vec{N}) = \frac{c}{b} |\sin \varphi|$$

On vérifie que pour $\varphi = \pi/2$, la tangente est égale à c/b (voir figure 2.6.).

- En fonction de l'anomalie vraie θ

Se référant au chapitre 2, on a :

$$c = \frac{ep}{1 - e^2} ; \quad b = \frac{\sqrt{1 - e^2} p}{1 - e^2} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{b} = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Au début du présent chapitre on a établi que :

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

D'où l'expression en fonction de e et θ :

$$\text{tg}(\overrightarrow{PF_\epsilon}, \vec{N}) = \frac{e |\sin \theta|}{1 + e \cos \theta} = \frac{1}{\text{tg} \alpha} \quad (\text{voir chapitre 3, paragraphe 4.1}).$$

2. Conclusion

Nous pouvons en déduire, en employant le langage de l'optique, que le rayon incident provenant d'un foyer se réfléchit à la surface de l'ellipse de sorte qu'il passe par l'autre foyer et que les angles d'incidence et de réflexion sont égaux et de signe contraire. Les opticiens disent que l'ellipse est « stigmatique » pour son couple de foyers.

➤ Remarque

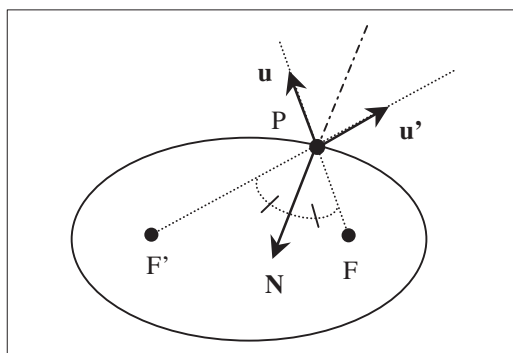


Figure 5.5 Propriétés de la normale à l'ellipse.

On peut démontrer rapidement que la normale en P est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs ; pour cela on dérive en fonction de φ la relation :

$$\sqrt{FP^2} + \sqrt{F'P^2} = 2a$$

Posant :

$$\bar{u} = \frac{\overrightarrow{FP}}{\sqrt{FP^2}} \quad \bar{u}' = \frac{\overrightarrow{F'P}}{\sqrt{F'P^2}}$$

et notant que le vecteur tangent $\frac{d\overrightarrow{FP}}{d\phi} = \frac{d\overrightarrow{F'P}}{d\phi}$

il vient : $(\bar{u} + \bar{u}') \frac{d\overrightarrow{FP}}{d\phi} = 0$

Le vecteur $\vec{N}$ est donc colinéaire à $\bar{u} + \bar{u}'$ et par conséquent porté par la bissectrice.

Chapitre 6

3^e loi de Kepler et référentiels

Pour un centre attractif donné, il existe une relation entre le demi-grand axe de l'ellipse et le temps mis par l'astre pour accomplir une révolution ; elle a été exprimée pour la première fois par Kepler : c'est sa troisième loi. L'ayant introduite, nous en donnons une expression numérique simple, puis indiquons la correction à y apporter afin de préserver le caractère réciproque des forces de gravitation. Ce sera l'occasion de rappeler que le référentiel galiléen est barycentrique, qualité que ne possèdent pas les référentiels héliocentrique ou géocentrique par exemple. Nous terminerons par des exemples montrant comment cette loi permet d'estimer la masse des planètes et de leurs satellites.

Les deux exercices en fin de chapitre traitent le cas d'une planète et de son unique satellite. Le premier montre que le référentiel du laboratoire serait le référentiel héliocentrique dans lequel le centre de masse des deux astres décrit une trajectoire elliptique. Le mouvement relatif fait apparaître la masse réduite des deux corps. Pour l'étude de ce mouvement, il convient de choisir un repère barycentrique ; c'est ce que propose le second exercice. Nous donnons enfin l'allure des trajectoires de la Terre et de la Lune dans le référentiel héliocentrique.

1 Lois de Kepler pour un centre attractif fixe

1.1 Rappel des hypothèses

On a établi au chapitre 4, paragraphe 3.4, que si un mouvement obéissait à la loi des aires, l'accélération subie était centrale. En outre, pour une trajectoire conique dont le foyer F est le **centre attractif**, on en a déduit que cette accélération était inversement proportionnelle au carré de la distance ρ du corps en mouvement à ce centre attractif. C'est dans cet ordre que Kepler a établi ses lois : loi des aires, puis trajectoire elliptique et plus tard la loi, objet du présent chapitre, liant le demi-grand axe à la période de révolution.

Donc, compte tenu des hypothèses,

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu}{\rho^2} \vec{I}$$

Afin d'être plus concret, on suppose que le centre attractif est le Soleil S de masse M_s : on fait donc le choix d'un **référentiel héliocentrique**. Le mouvement est celui d'une **planète** P de masse m_p .

Le *principe fondamental de la dynamique*, deuxième loi de Newton, permet de déduire la force subie par cette planète :

$$\vec{F}_p = m_p \vec{\Gamma}_p \quad \text{avec} \quad \vec{\Gamma}_p = -\frac{\mu_s}{\rho^2} \vec{I}$$

Cette force satisfait également à la *loi de l'attraction universelle*, quatrième loi formulée par Isaac Newton dans les *Principia* en 1687. Son module s'écrit :

$$\|\vec{F}_p\| = G \frac{m_p M_s}{\rho^2}$$

G est la **constante de gravitation universelle**, ou plus simplement constante de gravitation, dont on rappelle la valeur :

$$G = 6,672\,59 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2 \text{ (m}^3\text{.s}^{-2}/\text{kg)}$$

On a donc l'identité

$$G \frac{m_p M_s}{\rho^2} = m_p \frac{\mu_s}{\rho^2} \quad \text{d'où l'on tire :}$$

$$\mu_s = G M_s$$

Le Soleil ayant pour masse $M_s = 1,988\,9 \times 10^{30} \text{ kg}$

$$\mu_s = 1,327\,1 \times 10^{20} \text{ N.m}^2/\text{kg} \text{ (m}^3\text{.s}^{-2})$$

On a vu au chapitre 1 que la masse du Soleil est une constante dérivée. La valeur plus précise de la constante d'accélération ou **constante héliocentrique de la gravitation** est :

$$\mu_s = 1,327\,124\,4 \times 10^{20} \text{ m}^3.\text{s}^{-2}$$

La **constante géocentrique de la gravitation** est une constante primaire de valeur :

$$\mu_T = 3,986\,004\,418 \times 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2}$$

1.2 3^e loi de Kepler

■ Formulation

Exploitant la 2^e formule de Binet pour une accélération centrale en $1/\rho^2$, nous avons identifié le paramètre p à $\frac{C^2}{\mu}$, soit

$$\mu = \frac{C^2}{p}$$

• C est la constante des aires traduisant la proportionnalité de l'aire balayée S avec le temps t ,

$$\frac{1}{2} Ct = S$$

La surface totale de l'ellipse, $S = \pi ab$, est décrite durant la période de révolution T ; on déduit :

$$C = \frac{2\pi ab}{T}$$

• Nous avons établi (chapitre 2) que $p = \frac{b^2}{a}$
Finalement, il vient :

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

On peut considérer que

$$a = \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} \text{ représente la distance moyenne au foyer ;}$$

c'est R_p dans le cas du cercle.

Pour toute planète P du système solaire,

$$\frac{a_p^3}{T_p^2} = C^{\text{te}} = \frac{\mu_s}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi^2} GM_s$$

C'est la 3^e loi de Kepler qui énonce que le carré de la période de révolution de la planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse parcourue et que la constante de proportionnalité est la même pour toutes les planètes du système solaire, puisqu'elle ne dépend que de la masse du centre attractif :

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} a_p^3$$

■ Expressions numériques

Donnons une expression simple de

$$T^2 = (4\pi^2/G) \cdot \frac{a^3}{M} \quad \text{où} \quad 4\pi^2/G = 5,916\,51 \times 10^{11} \text{ SI}$$

dérivée des unités suivantes, précisées au chapitre introductif :

- l'année julienne (aj) = $365,25 \times 24 \times 3600 = 365,25 \times 86\,400$
= 31 557 600 s
- l'unité astronomique (ua) = $149,597\,870\,61 \times 10^9 \text{ m}$
- la masse du Soleil (M_s) = $1,988\,9 \times 10^{30} \text{ kg}$

On calcule alors :

$$T^2_{(aj)} \times (31,557\,6 \times 10^6)^2 = 5,916\,51 \times 10^{11} \times \frac{a^3_{(ua)} \times (149,59787061 \times 10^9)^3}{M_{(Ms)} \times 1,9889 \times 10^{30}}$$

Introduisant le coefficient K_s , on déduit :

$$T^2_{(aj)} = K_s \frac{a^3_{(ua)}}{M_{(Ms)}} \quad \text{avec} \quad K_s = 1,000\,05 \quad \text{dans le système d'unités}$$

ci-dessus défini.

On peut donc légitimement retenir la valeur unité pour K_s , d'où les formules :

$$T^2_{(aj)} \approx \frac{a^3_{(ua)}}{M_{(Ms)}} \quad \text{ou} \quad M_{(Ms)} \approx \frac{a^3_{(ua)}}{T^2_{(aj)}}$$

La 3^e loi de Kepler s'exprime encore plus simplement pour les planètes du système solaire car $M_{(Ms)}$ étant égale à l'unité on obtient la relation :

$$T^2_{(aj)} \approx a^3_{(ua)}$$

➤ Remarque

Il n'est pas surprenant que le coefficient K_s soit si proche de l'unité ; mais pour obtenir rigoureusement $K_s = 1$, il aurait par exemple fallu choisir comme unités liées à la Terre :

- l'année sidérale T_{Sid} (unité notée sid) ;
- la distance moyenne Terre-Soleil $a_T = (T_{\text{Sid}}/2\pi)^{2/3} \cdot (GM_s)^{1/3}$ (unité notée at).

La 3^e loi de Kepler, par rapport à ces unités et à la masse du Soleil, s'écrit :

$$T^2_{(\text{Sid})} \times T^2_{\text{Sid}} = (4\pi^2/G) \times \frac{1}{M_{(Ms)} M_s} \times a^3_{(\text{at})} (T_{\text{Sid}}/2\pi)^2 GM_s$$

et on obtient en toute rigueur : $T^2_{(\text{Sid})} = \frac{a^3_{(\text{at})}}{M_{(Ms)}}$

À ce titre, l'unité astronomique et l'année julienne ne sont pas tout à fait cohérentes. La cohérence aurait par exemple été obtenue en choisissant une année T_G correspondant à la constante de Gauss, soit :

$$T_G = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,017\,202\,098\,95} \text{ j} = 365,256\,898\,3 \text{ j}$$

$$T_G = 365 \text{ j } 6 \text{ h } 9 \text{ min } 56,013 \text{ s} = 31\,558\,196,013 \text{ s}$$

et pour une époque où $T_{\text{Sid}} = T_G$, le coefficient K_s est alors strictement égal à l'unité.

2 Correction à la 3^e loi de Kepler

Comme nous venons de le voir, les planètes du Soleil sont étudiées dans un référentiel héliocentrique. Les satellites de la Terre, la Lune par exemple, sont étudiés dans un référentiel géocentrique. Le mouvement d'un satellite d'une planète quelconque sera étudié dans un référentiel lié à celle-ci.

Le problème est que ces référentiels masquent le caractère réciproque de la gravitation universelle...

2.1 Référentiel galiléen

On considère un ensemble de corps A, B, C, ... , K. Dans un **référentiel Galiléen**, l'accélération d'un corps quelconque du système est la somme vectorielle des accélérations que lui communiquent les autres corps, conformément à la loi d'attraction universelle.

■ Cas de deux corps A et B

Soit deux corps de masses m_A et m_B respectivement en A et B à l'instant t (figure 6.1) :

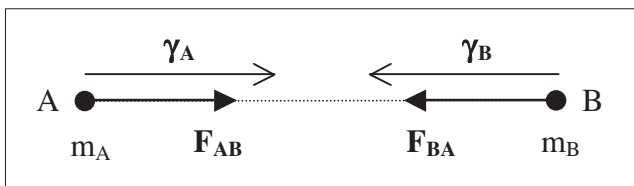


Figure 6.1 Interaction gravitationnelle entre deux corps.

La force d'attraction subie par le corps A est :

$$\vec{F}_{AB} = m_A \frac{Gm_B}{AB^3} \overrightarrow{AB}$$

L'accélération créée par le corps B en A étant :

$$\vec{\gamma}_A = \frac{Gm_B}{AB^3} \overrightarrow{AB}$$

Considérant le corps B, on écrit :

$$\vec{F}_{BA} = m_B \frac{Gm_A}{AB^3} \overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_B = \frac{Gm_A}{AB^3} \overrightarrow{BA}$$

On vérifie que :

$$m_A \vec{\gamma}_A + m_B \vec{\gamma}_B = 0 \quad \text{et} \quad \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$$

Le principe de l'action et de la réaction (3^e loi de Newton) est donc satisfait.

■ Cas de l'ensemble de corps A, B, C, ... , K

On écrit que chaque corps est soumis localement à la somme des accélérations dues aux autres :

$$\vec{\Gamma}_A = \frac{Gm_B}{AB^3} \overrightarrow{AB} + \frac{Gm_C}{AC^3} \overrightarrow{AC} + (...) + \frac{Gm_K}{AK^3} \overrightarrow{AK}$$

$$\vec{\Gamma}_B = \frac{Gm_A}{BA^3} \overrightarrow{BA} + \frac{Gm_C}{BC^3} \overrightarrow{BC} + (...) + \frac{Gm_K}{BK^3} \overrightarrow{BK}$$

$$\vec{\Gamma}_C = \frac{Gm_A}{CA^3} \overrightarrow{CA} + \frac{Gm_B}{CB^3} \overrightarrow{CB} + (...) + \frac{Gm_K}{CK^3} \overrightarrow{CK}$$

.....

$$\vec{\Gamma}_K = \frac{Gm_A}{KA^3} \overrightarrow{KA} + \frac{Gm_B}{KB^3} \overrightarrow{KB} + \frac{Gm_C}{KC^3} \overrightarrow{KC} + (...)$$

On déduit :

$$\bullet m_A \vec{\Gamma}_A + m_B \vec{\Gamma}_B + m_C \vec{\Gamma}_C + ... + m_K \vec{\Gamma}_K = \vec{0},$$

ce qui signifie que la *quantité d'accélération* est nulle.

Effectuant une première intégration, il vient :

$$\bullet m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B + m_C \vec{V}_C + ... + m_K \vec{V}_K = C^{te} = \vec{P}, \text{ où } \vec{P} \text{ est une constante d'intégration ; cette égalité traduit le fait que la } \textit{quantité de mouvement} \text{ est constante.}$$

Enfin, une dernière intégration conduit à :

$$\bullet m_A \overrightarrow{OA} + m_B \overrightarrow{OB} + m_C \overrightarrow{OC} + ... + m_K \overrightarrow{OK} = \vec{P}t + \vec{Q},$$

le vecteur $\vec{Q}$ étant la deuxième constante d'intégration.

On choisit $\vec{P} = \vec{0}$; $\vec{Q} = \vec{0}$;

l'origine O introduite lors de la deuxième intégration correspond alors au *barycentre* G, d'où l'écriture finale :

$$\bullet m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} + m_C \vec{GC} + \dots + m_K \vec{GK} = \vec{0}$$

On définit ainsi un **référentiel barycentrique**, c'est-à-dire dont l'origine du repère d'espace est le centre d'inertie des corps A, B, C, ..., K, et dont l'orientation est rapportée à trois étoiles fixes. Un tel référentiel est bien sûr galiléen. Un exemple est le **référentiel de Copernic** dont l'origine du repère est le *centre d'inertie du système solaire*.

Le **référentiel héliocentrique ou de Kepler** est quant à lui constitué d'un repère ayant pour origine le *centre d'inertie du Soleil* et en translation par rapport à celui de Copernic. Considérer le référentiel de Kepler comme galiléen revient donc à confondre le centre d'inertie du Soleil avec celui du système solaire ; il est vrai qu'à lui seul, le Soleil représente 99,87 % de la masse du système solaire !

2.2 Référentiel relatif

On considère maintenant un ensemble de trois corps, à savoir le Soleil S de masse M_s , et deux planètes P et P' de masses respectives m_p et $m_{p'}$.

■ Accélérations dans un référentiel galiléen

$$\vec{\Gamma}_s = G m_p \frac{\vec{SP}}{SP^3} + G m_{p'} \frac{\vec{SP'}}{SP'^3} \quad \text{est l'accélération subie par le Soleil,}$$

$$\vec{\Gamma}_p = G M_s \frac{\vec{PS}}{PS^3} + G m_{p'} \frac{\vec{PP'}}{PP'^3} \quad \text{est l'accélération subie par la planète P,}$$

$$\vec{\Gamma}_{p'} = G M_s \frac{\vec{P'S}}{P'S^3} + G m_p \frac{\vec{P'P}}{P'P^3} \quad \text{est l'accélération subie par la planète P'.$$

■ Accélérations dans le référentiel héliocentrique

Dans ce **référentiel relatif**, le Soleil est considéré comme fixe et son accélération y est nulle ; pour chacun des trois astres, les accélérations sont :

$$\vec{\gamma}_s = \vec{\Gamma}_s - \vec{\Gamma}_s = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_p = \vec{\Gamma}_p - \vec{\Gamma}_s = G(M_s + m_p) \frac{\vec{PS}}{PS^3} + G m_{p'} \left(\frac{\vec{PP'}}{PP'^3} - \frac{\vec{SP'}}{SP'^3} \right)$$

$$\vec{\gamma}_{p'} = \vec{\Gamma}_{p'} - \vec{\Gamma}_s = G(M_s + m_{p'}) \frac{\vec{P'S}}{P'S^3} + G m_p \left(\frac{\vec{P'P}}{P'P^3} - \frac{\vec{SP}}{SP^3} \right)$$

L'accélération s'appliquant à la planète P est la somme de deux termes, le deuxième étant dû à la *perturbation apportée par la planète P'*. Dans la mesure où ce deuxième terme peut être négligé, on se ramène au problème à deux corps, mais l'accélération doit s'exprimer en tenant compte de la masse m_p :

$$\gamma_p \approx G \frac{(M_s + m_p)}{\rho^2}$$

la 3^e loi de Kepler a maintenant pour expression :

$$G(M_s + m_p) = 4\pi^2 \frac{a_p^3}{T_p^2}$$

■ Accélération dans un référentiel lié à la planète

Pour l'étude d'un satellite de la planète P, on utilise un référentiel lié à celle-ci. On va considérer que le satellite de masse m_{sat} est en P' ; il subit l'accélération $\vec{\gamma}_{\text{sat}}$ telle que :

$$\vec{\gamma}_{\text{sat}} = \vec{\Gamma}_{P'} - \vec{\Gamma}_P = G(m_p + m_{\text{sat}}) \frac{\vec{P'P}}{P'P^3} + GM_s \left(\frac{\vec{P'S}}{P'S^3} - \frac{\vec{PS}}{PS^3} \right)$$

Dans l'hypothèse où le satellite a une orbite proche de la planète comparée à la distance de celle-ci au Soleil, on pourra faire l'approximation :

$$\gamma_{\text{sat}} \approx G \frac{(m_p + m_{\text{sat}})}{\rho_{\text{sat}}^2}$$

d'où la 3^e loi de Kepler corrigée dans le cas du satellite :

$$G(m_p + m_{\text{sat}}) = 4\pi^2 \frac{a_{\text{sat}}^3}{T_{\text{sat}}^2}$$

2.3 Masses des planètes et des satellites

1. Si on utilise la 3^e loi de Kepler sans correction, on obtient :

- pour une planète quelconque du système solaire par exemple,

$$M_s = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a_p^3}{T_p^2}$$

- pour un satellite quelconque d'une planète P

$$m_p = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a_{\text{sat}}^3}{T_{\text{sat}}^2}$$

Le rapport de la masse de la planète sur celle du Soleil est dans ce cas :

$$\frac{m_p}{M_s} = \left(\frac{a_{\text{sat}}}{a_p} \right)^3 \left(\frac{T_p}{T_{\text{sat}}} \right)^2 = \Lambda$$

2. Compte tenu maintenant des expressions corrigées de la 3^e loi de Kepler pour un satellite d'une planète et pour une planète du Soleil, le rapport des deux expressions donne :

$$\frac{m_p + m_{\text{sat}}}{M_s + m_p} = \Lambda$$

• Dans le cas où la masse du satellite est négligeable devant celle de sa planète, la relation devient :

$$\frac{m_p / M_s}{1 + m_p / M_s} \approx \Lambda \quad \text{soit :} \quad \frac{m_p}{M_s} \approx \frac{\Lambda}{1 - \Lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{M_s}{m_p} \approx \frac{1}{\Lambda} - 1$$

Par exemple, de la connaissance de l'orbite d'un satellite géostationnaire, on peut en déduire le rapport de la masse du Soleil à celle, m_T , de la Terre.

Pour la Terre : $a_T = 1,000\,001 \text{ ua}$ $T_T = 365,2564 \text{ j}$

Pour le satellite : $a_{\text{sat}} = 42\,164 \text{ km}$ $T_{\text{sat}} = 86\,164,0956 \text{ s}$ (voir exercice E7-1).

Avec ces valeurs, $\frac{M_s}{m_T} = 332\,951$

La valeur retenue est de fait de 332 946,045 ; une telle précision impose de connaître le rayon de l'orbite au mètre près, soit $a_{\text{sat}} = 42\,164,210 \text{ km}$!

• Dans l'hypothèse où le rapport m_p / M_s est déjà connu avec une bonne précision, on peut alors déterminer la masse relative d'un satellite naturel de la planète :

$$\frac{1 + m_{\text{sat}} / m_p}{1 + M_s / m_p} = \Lambda \quad \text{donne} \quad \frac{m_{\text{sat}}}{m_p} = \left(1 + \frac{M_s}{m_p} \right) \Lambda - 1$$

et la masse rapportée à celle du Soleil est :

$$\frac{m_{\text{sat}}}{M_s} = \left(1 + \frac{m_p}{M_s} \right) \Lambda - \frac{m_p}{M_s}$$

La masse relative des satellites galiléens de Jupiter est actuellement connue avec une précision de quatre chiffres significatifs, et les données concernant la planète sont :

$$a_j = 5,202\,603 \text{ ua} \quad T_j = 4\,332,59 \text{ j} \quad \frac{M_s}{m_j} = 1\,047,565\,453$$

On calcule au tableau suivant le demi-grand axe des 4 satellites à partir des données m_{sat} / m_J et T_{sat} (périodes de révolution connues avec une excellente précision) :

Nom du satellite galiléen	Masse relative $10^5 m_{\text{sat}} / m_J$	Période de révolution T_{sat} j	Demi-grand axe a_{sat} km
Io	4,705	1,769 138	421 661,36
Europe	2,527	3,551 181	670 967,35
Ganymède	7,804	7,154 553	1 070 324,55
Callisto	5,668	16,689 018	1 882 541,60

On notera que la cohérence avec la valeur des masses des satellites impose de calculer le demi-grand axe à dix mètres près !

Prenons comme autre exemple la Lune, dont les données sont :

$$a_L = 383\,398 \text{ km} \quad T_L = 27,3217 \text{ j} \quad m_L = 1,230 \% \text{ de } m_T$$

On peut vérifier que la valeur ci-dessus de la période de révolution lunaire ne permet pas de retrouver le rapport m_L / m_T ; en revanche, la valeur $T_L = 27,1780 \text{ j}$ calculée à l'exercice E6-2 (hors perturbations) convient parfaitement.

exercices

E6-1 Système de deux corps dans le référentiel du centre de masse

On considère deux corps de masses respectives m_1 et m_2 , qui dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, muni d'un repère de centre O , ont pour position : $\overrightarrow{OM}_1 = \vec{\rho}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2 = \vec{\rho}_2$.

La position relative des deux corps est : $\vec{\rho} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1$

On posera : $M = m_1 + m_2$, et $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Ces deux corps sont soumis à un champ de pesanteur $\vec{g}$ et à la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

1. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$.

a) Déterminer la position G du centre de masse (CM), sa vitesse et son accélération.

b) Le champ de pesanteur est maintenant supposé négligeable : les deux corps forment un système isolé. Montrer qu'il y a conservation de la quantité de mouvement et l'exprimer en fonction de la vitesse du CM.

c) Écrire l'expression du moment cinétique et de l'énergie cinétique.

d) Montrer que le mouvement relatif des deux corps se ramène à celui d'un corps unique de masse m soumis à la force $\vec{F}$.

2. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}_G$ du CM.

a) Déterminer les positions des points M_1 et M_2 par rapport à G , et en déduire les quantités de mouvement de chaque corps et du système.

b) Donner l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_G$.

c) Donner également l'expression de l'énergie cinétique E_C .

3. Montrer que les grandeurs cinétiques obtenues dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire sont la somme d'un premier terme lié au mouvement du CM et d'un deuxième lié au mouvement relatif des deux corps.

solutions

1. Référentiel $\mathcal{R}$

a) Position G du CM, vitesse $\vec{V}_G$, accélération $\vec{\Gamma}_G$

Par définition : $\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \vec{\rho}_1 + m_2 \vec{\rho}_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{V}_1 = \frac{d\vec{\rho}_1}{dt}$ et $\vec{V}_2 = \frac{d\vec{\rho}_2}{dt}$

On déduit : $\vec{V}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{\Gamma}_G = \frac{d^2 \overline{OG}}{dt^2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 \frac{d^2 \vec{p}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{p}_2}{dt^2} \right)$$

Or
$$m_1 \frac{d^2 \vec{p}_1}{dt^2} = m_1 \vec{g} - \vec{F} \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d^2 \vec{p}_2}{dt^2} = m_2 \vec{g} + \vec{F}$$

Ce qui donne : $\vec{\Gamma}_G = \vec{g} \rightarrow$ le mouvement du centre de masse est rectiligne, uniformément varié.

b) Quantité de mouvement $\vec{p}$

$$\vec{g} \approx 0 \rightarrow \frac{d^2 \overline{OG}}{dt^2} = 0 \rightarrow m_1 \frac{d^2 \vec{p}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{p}_2}{dt^2} = 0$$

Après intégration, et en introduisant les quantités de mouvement de chaque corps, on obtient :

$$m_1 \frac{d\vec{p}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} = C^{\text{te}}$$

Or
$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}_G$$

D'où :
$$\vec{p} = M \vec{V}_G = M \frac{d\overline{OG}}{dt} = C^{\text{te}}$$

c) Moment cinétique $\vec{\sigma}$, énergie cinétique e_c

$$\vec{\sigma} = \vec{p}_1 \wedge m_1 \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{p}_2 \wedge m_2 \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{p}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \wedge \vec{p}_2$$

$$e_c = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\vec{p}_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\vec{p}_2}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_2^2$$

d) Mouvement relatif

Chacun des deux corps est soumis à la force d'attraction mutuelle $\vec{F}$ telle que :

$$\vec{F} = m_2 \frac{d^2 \vec{p}_2}{dt^2} \rightarrow m_1 \vec{F} = m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{p}_2}{dt^2}$$

$$\vec{F} = -m_1 \frac{d^2 \vec{p}_1}{dt^2} \rightarrow m_2 \vec{F} = -m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{p}_1}{dt^2}$$

D'où, après addition,
$$\vec{F} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d^2 \vec{p}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{p}_1}{dt^2} \right) \rightarrow \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}$$

2. Référentiel $\mathcal{R}_G$ du CM

a) Positions de M_1 et M_2 , quantités de mouvement $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ et $\vec{P}$

$$\overline{GM}_1 = \overline{OM}_1 - \overline{OG} = \vec{p}_1 - \frac{m_1 \vec{p}_1 + m_2 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}{m_1 + m_2}$$

Les positions sont donc :

$$\overline{\text{GM}}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{\rho} \quad \overline{\text{GM}}_2 = +\frac{m_1}{M} \vec{\rho}$$

Il en découle les expressions des quantités de mouvement :

$$\vec{P}_1 = m_1 \frac{d\overline{\text{GM}}_1}{dt} \rightarrow \vec{P}_1 = -m \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad \vec{P}_2 = m_2 \frac{d\overline{\text{GM}}_2}{dt} \rightarrow \vec{P}_2 = +m \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

La quantité de mouvement du système est $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ soit $\vec{P} = 0$

b) Moment cinétique $\vec{\sigma}_G$

$$\vec{\sigma}_G = \overline{\text{GM}}_1 \wedge \vec{P}_1 + \overline{\text{GM}}_2 \wedge \vec{P}_2 = \overline{\text{M}_1\text{M}_2} \wedge m \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$\text{soit} \quad \vec{\sigma}_G = \vec{\rho} \wedge m \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

c) Énergie cinétique E_c

$$E_c = \frac{\vec{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{P}_2^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) m^2 \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)^2$$

$$\text{soit} \quad E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)^2$$

3. Grandeurs cinétiques somme de deux termes

• Quantité de mouvement :

$$\vec{p} = M \frac{d\overline{\text{OG}}}{dt} + \vec{P} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = 0$$

• Moment cinétique :

Réécrivons $\vec{\sigma}$ en tenant compte du fait que :

$$\overline{\text{OM}}_1 = \overline{\text{OG}} + \overline{\text{GM}}_1 \quad \text{soit} \quad \vec{\rho}_1 = \overline{\text{OG}} - \frac{m_2}{M} \vec{\rho}$$

$$\overline{\text{OM}}_2 = \overline{\text{OG}} + \overline{\text{GM}}_2 \quad \text{soit} \quad \vec{\rho}_2 = \overline{\text{OG}} + \frac{m_1}{M} \vec{\rho}$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \left(\overline{\text{OG}} - \frac{m_2}{M} \vec{\rho} \right) \wedge \left(m_1 \frac{d\overline{\text{OG}}}{dt} - m \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) \\ &\quad + \left(\overline{\text{OG}} + \frac{m_1}{M} \vec{\rho} \right) \wedge \left(m_2 \frac{d\overline{\text{OG}}}{dt} + m \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) \end{aligned}$$

Développant et simplifiant on obtient :

$$\vec{\sigma} = \overline{\text{OG}} \wedge M \frac{d\overline{\text{OG}}}{dt} + \vec{\sigma}_G \quad \text{avec} \quad \vec{\sigma}_G = \vec{\rho} \wedge m \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

• Énergie cinétique :

On développe e_c sachant que :

$$\left(\frac{d\vec{p}_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 - 2\frac{m_2}{M} \frac{d\vec{OG}}{dt} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\left(\frac{d\vec{p}_2}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 + 2\frac{m_1}{M} \frac{d\vec{OG}}{dt} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

D'où l'expression :

$$e_c = \frac{1}{2}M\left(\frac{d\vec{OG}}{dt}\right)^2 + E_c \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2$$

E6-2 Système planète-satellite naturel

On considère une planète et son satellite naturel de masses respectives m_1 et m_2 , isolés dans l'espace et tels que la distance de leurs centres M_1 et M_2 reste constante et égale à a .

1. Quel est le mouvement relatif possible de ces deux astres ? Et quel est le repère d'étude approprié ? Faire un schéma.
2. Calculer le rayon et la période des trajectoires.
3. Faire l'application numérique pour le système Terre-Lune où les données sont :

$$\mu_T = Gm_T = 3,986\,004\,418 \times 10^{14} \text{ m}^3.\text{s}^{-2}$$

$$\frac{m_L}{m_T} = k = 0,012\,300\,034 \quad a = 383\,398 \text{ km}$$

4. Dans le cas du couple Pluton-Charon, on demande de calculer la masse m_p de la Planète et celle m_c du satellite ; les données étant :

$$G = 6,672\,59 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{s}^{-2}.\text{kg}^{-1} \quad T = 6,387\,46 \text{ j}$$

$$a = 19\,460 \text{ km} \quad r_c = 16\,825 \text{ km} \quad (r_p = 2\,635 \text{ km})$$

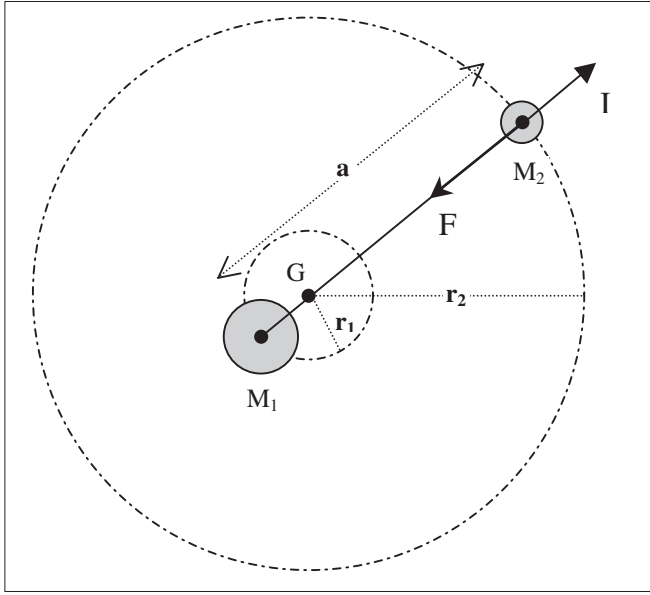
☞ solutions

1. Mouvement et repère

Le seul mouvement possible est un mouvement de rotation autour du centre de masse G, les centres M_1 et M_2 de la Planète et de son satellite étant alignés avec celui-ci.

Le repère d'étude est le repère barycentrique.

Sur la figure 6.2, $\vec{I}$ est le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2 .

Figure 6.2 Système planète (M_1) – satellite (M_2).

2. Rayons r_1 et r_2 , période T

G étant le barycentre, il vient :

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a$$

Considérant par exemple le satellite :

- Il est soumis à la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{a^2} \vec{I}$
- la composante orthoradiale de son accélération est nulle

$$\Gamma_\theta = r_2 \ddot{\theta} \equiv 0 \rightarrow \dot{\theta} = C^{\text{ue}} = \omega$$

- la composante radiale a donc pour expression $\Gamma_\rho = -r_2 \dot{\theta}^2 = -r_2 \omega^2$
(voir chapitre 3, paragraphe 1).

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$G \frac{m_1 m_2}{a^2} = m_2 r_2 \omega^2$$

Compte tenu de l'expression de r_2 , on retiendra finalement

$$G \frac{m_1 m_2}{a^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a \omega^2 = m a \omega^2$$

On se ramène au problème d'une masse fictive m en rotation à la distance a du CM.

Notant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, il vient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

3. Système Terre-Lune : rayons r_T , r_L et période T

$$r_T = \frac{m_L}{m_T + m_L} a = \frac{k}{1 + k} a \rightarrow r_T = 4\,658,5 \text{ km}$$

$$r_L = \frac{m_T}{m_T + m_L} a = \frac{1}{1 + k} a \rightarrow r_L = 378\,739,5 \text{ km}$$

Le CM du système Terre-Lune se trouve donc à 4 658 km du centre de la Terre dont le rayon est de 6 378 km ; ainsi, on peut dire en première approximation que la Lune tourne autour de notre planète qui elle reste immobile.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_T(1+k)}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_T(1+k)}} \rightarrow T = 27,1780 \text{ j} \quad (2\,348\,179 \text{ s})$$

Dans l'approximation géocentrique, on obtient $T = 27,3446 \text{ j}$; compte tenu des différentes perturbations, la valeur à retenir est en réalité $T = 27,3217 \text{ j}$.

4. Couple Pluton-Charon, m_p et m_c

• La connaissance de la distance Charon-CM permet d'en déduire le rapport de la masse du satellite à celle de la planète :

$$r_c = \frac{1}{1+k} a \quad \text{d'où} \quad k = \frac{m_c}{m_p} = \frac{a}{r_c} - 1 \rightarrow k = 0,156\,61$$

• D'après la 3^e loi de Kepler corrigée, posant $M = m_p + m_c$, on déduit :

$$GM = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \rightarrow GM = 955,222 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

et $M = 143,156 \cdot 10^{20} \text{ kg}$; d'où

$$m_p = \frac{M}{1+k} \rightarrow m_p = 123,8 \times 10^{20} \text{ kg}$$

$$m_c = km_p = \frac{kM}{1+k} \rightarrow m_c = 19,4 \times 10^{20} \text{ kg}$$

➤ Remarques

1– Pour le système Terre-Lune on donne à la figure 6.3 la trajectoire autour du Soleil du centre de masse G, laquelle est une ellipse, ainsi que l'allure des trajectoires de notre planète et de son satellite, sachant que la Lune n'orbite pas dans le plan de l'écliptique !

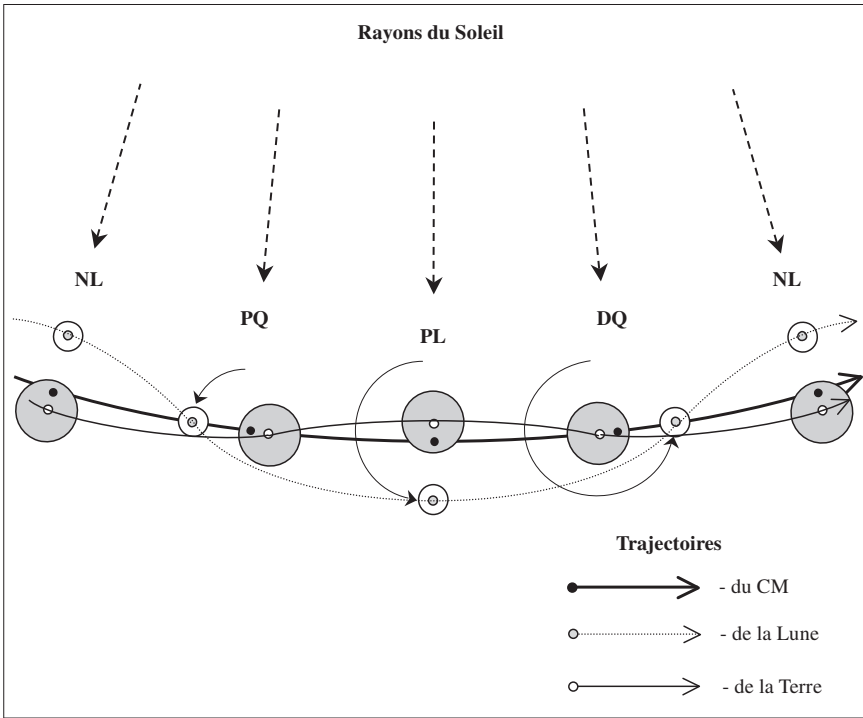


Figure 6.3 Trajectoires autour du soleil, de la Terre, de la Lune et de leur centre de masse.

2– Les astres 1 et 2 sont distants de r_1 et r_2 du centre de masse et ont une période de révolution commune T . Leurs vitesses de rotation sont :

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T}$$

On en déduit les égalités liant rayons, vitesses et masses :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

La connaissance de la période et des vitesses permet d'en déduire la distance $a = r_1 + r_2$ entre les deux astres, puis par l'équation de Kepler la somme des masses $M = m_1 + m_2$ et finalement chacune des masses m_1 et m_2 . C'est le principe de la méthode utilisée pour évaluer les masses d'étoiles très rapprochées dites **étoiles doubles**.

Énergie et vitesse selon la trajectoire

Nous introduisons différentes grandeurs énergétiques et démontrons que pour un corps soumis à une force d'origine gravitationnelle, l'énergie sur la trajectoire est une constante inversement proportionnelle au grand axe. Nous verrons que le signe de cette deuxième constante dynamique détermine la nature de la conique, et que la connaissance des deux constantes dynamiques permet d'accéder à l'excentricité. Il sera enfin montré que la trajectoire est parfaitement déterminée par la vitesse de lancement du satellite comparée aux vitesses minimales de satellisation et de libération, respectivement appelées première et deuxième vitesse cosmique.

Les deux premiers exercices concernent les satellites géostationnaires. Nous déterminons les caractéristiques d'une orbite géosynchrone, puis comment faire passer le satellite de l'orbite basse de lancement à son orbite opérationnelle : c'est le transfert d'orbite de Hohmann.

Les deux exercices suivants nous feront voyager dans notre système solaire. Nous apprendrons à déterminer la trajectoire à énergie minimale d'une sonde vers Mars et la durée d'un tel voyage, qui ne peut se reproduire que tous les 780 jours ! Nous préciserons également les positions de notre planète et de l'astre rouge au départ et à l'arrivée de la sonde. Nous calculerons enfin la vitesse à communiquer pour un poser en douceur. Le dernier exercice propose toutefois deux autres issues à ce voyage : soit la sonde passe à une distance donnée de Mars et, profitant de cet effet catapulte, elle continue son voyage ; soit on la satellise en diminuant sa vitesse...

1 Caractérisation énergétique des trajectoires

1.1 Énergie potentielle, cinétique et mécanique

■ Énergie potentielle E_p

Le corps de masse m , planète ou satellite, soumis à l'accélération centrale en $1/\rho^2$, subit une force d'attraction dirigée vers le centre attractif :

$$\vec{F}(\rho) = -m \frac{\mu}{\rho^2} \vec{I} \quad (\text{voir figure 4.1 par exemple}).$$

Pour un déplacement $\vec{dl}$, le travail élémentaire effectué est :

$$\delta W = \vec{F} \vec{dl}$$

Seule la composante suivant $\vec{I}$ de $\vec{dl}$ contribue au travail, et au cours du déplacement de l'infini (état initial 1) à la distance ρ (état final 2), le travail effectué par le corps est :

$$W_{12} = \int_{\infty}^{\rho} -m\mu \frac{dx}{x^2} = \left| m \frac{\mu}{x} \right|_{\infty}^{\rho} = m \frac{\mu}{\rho}$$

Le travail de la force conservative est égal à la variation de l'énergie potentielle E_p du corps entre l'état 1 et l'état 2 :

$$W_{12} = E_p(\infty) - E_p(\rho) = m \frac{\mu}{\rho}$$

L'énergie potentielle est choisie nulle à l'infini ; ainsi, $E_p(\rho)$ est égal à moins le travail de la force de l'infini à ρ . On notera simplement :

$$E_p = -m \frac{\mu}{\rho}$$

Le signe moins traduit le fait que le corps perd de l'énergie en se rapprochant du centre attractif. On note également que :

$$\vec{F} \vec{dl} = -dE_p = -\overrightarrow{\text{grad} E_p} \vec{dl}$$

ce qui conduit à :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad} E_p} = -m \overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{\mu}{\rho} \right)$$

La grandeur $U_p(\rho) = -\frac{\mu}{\rho}$, homogène au carré d'une vitesse, est le **potentiel gravitationnel** qui correspond à l'énergie potentielle massique.

Compte tenu du type de trajectoire, l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = -m\mu \frac{1 + e \cos \theta}{p}$$

■ Énergie cinétique E_c

On calcule l'énergie liée au mouvement, en utilisant la formule de Binet relative à la vitesse ;

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

soit :

$$E_c = \frac{1}{2} m C^2 \left[\left(\frac{1}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^2 \right]$$

Or, $\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$ et $C^2 = p\mu$

d'où le résultat :

$$E_c = \frac{1}{2} m\mu \frac{1 + 2e \cos \theta + e^2}{p}$$

• Donnons d'autres expressions de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m\mu \frac{1 + e \cos \theta + e(e + \cos \theta)}{p}$$

d'où on déduit :

$$E_c = -\frac{1}{2} E_p + \frac{1}{2} m\mu \frac{e(e + \cos \theta)}{p} \quad \text{soit en mettant } -\frac{1}{2} E_p \text{ en facteur,}$$

$$E_c = -\frac{1}{2} E_p \left[1 + \frac{e(e + \cos \theta)}{1 + e \cos \theta} \right]$$

Le deuxième terme du crochet a été exprimé en fonction de l'*anomalie excentrique* φ , ce qui permet l'écriture condensée :

$$E_c = -\frac{1}{2} E_p (1 + e \cos \varphi)$$

Notons qu'en dérivant par rapport au temps l'équation de Kepler établie au chapitre 5, on a :

$$\frac{2\pi}{T} = \dot{\varphi} (1 - e \cos \varphi)$$

De ces deux dernières relations faisant intervenir l'anomalie excentrique, on déduit :

$$\frac{T d\varphi}{\pi dt} = \frac{E_p}{E_p + E_c}$$

- Établissons encore une autre expression très utile de l'énergie cinétique. L'expression initiale de E_c peut se décomposer comme suit :

$$E_c = \frac{1}{2} m \mu \left[\frac{2(1 + e \cos \theta)}{p} + \frac{e^2 - 1}{p} \right]$$

Ainsi, quelle que soit la trajectoire conique, on retient :

$$E_c = \frac{1}{2} m \mu \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right) \text{ et } V^2 = \mu \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right)$$

■ Énergie mécanique E

La variation de l'énergie cinétique s'obtient en introduisant la vitesse dans l'expression du travail élémentaire de la somme $\vec{F}$ des forces auxquelles le corps est soumis :

$$\delta W = \vec{F} d\vec{l} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{V} dt = d \left(\frac{1}{2} m \vec{V}^2 \right) = dE_c$$

Si on considère d'autre part que les forces agissantes dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire qu'en particulier il n'y a pas de force de frottement, il vient alors :

$$\vec{F} d\vec{l} = -dE_p = dE_c$$

Or l'énergie mécanique E du corps assimilé à un point matériel est la somme des énergies cinétique et potentielle :

$$E = E_c + E_p$$

d'où :

$$dE \equiv 0$$

Par conséquent l'énergie mécanique est une constante du mouvement ; c'est la **deuxième constante dynamique**. La première constante est celle de la loi des aires, comme vu au chapitre 3. Compte tenu des dernières expressions de E_c , on obtient immédiatement :

$$E = \frac{1}{2} m \mu \frac{e^2 - 1}{p}$$

Rappelons que : - lorsque $e < 1$ on a établi $p = a(1 - e^2) = b^2/a$

- lorsque $e > 1$ on a posé $b^2 = c^2 - a^2$

d'où $p = -a(e^2 - 1) = -b^2/a$ et on a vu que dans ce cas, a est devenu négatif, donc p reste positif.

On en déduit la deuxième expression de l'énergie totale, valable quelque soit le type de conique :

$$E = -\frac{1}{2} m \frac{\mu}{a}$$

Dans le cas particulier de l'orbite circulaire de rayon R_p ,

$$E = -\frac{1}{2}m\frac{\mu}{R_p} \quad E_p = -m\frac{\mu}{R_p} \quad E_c = \frac{1}{2}m\frac{\mu}{R_p}$$

Le tableau suivant donne quelques précisions sur l'évolution de l'énergie mécanique selon les valeurs de l'excentricité :

Excentricité	Courbe	Demi-grand axe	Énergie mécanique	Remarques
$e = 0$	cercle	$a = p = R_p$	$E < 0$	$E_c = \text{Cte}$
$0 < e < 1$	ellipse	$e \rightarrow 1^- \Rightarrow a \rightarrow +\infty$	$E < 0$	$E_c < E_p $
$e = 1$	parabole	$ a = \infty$	$E = 0$	$\theta \rightarrow \pm \pi \Rightarrow E_c \rightarrow 0$
$e > 1$	hyperbole	$e \rightarrow 1^+ \Rightarrow a \rightarrow -\infty$	$E > 0$	$E_c > E_p $

■ Énergie fournie E_F

Cette notion d'énergie fournie trouve son intérêt dans l'étude des satellites artificiels. Au repos, au sol, l'énergie potentielle est :

$$E_p(R_T) = -m\frac{\mu}{R_T} \quad \text{où } R_T \text{ est le rayon terrestre.}$$

Si on néglige la vitesse d'entraînement de la Terre, l'énergie fournie a pour expression :

$$E_F = E - E_p(R_T) = -\frac{1}{2}m\frac{\mu}{a} + m\frac{\mu}{R_T}$$

soit :

$$E_F = m\frac{GM_T}{R_T}\left(1 - \frac{R_T}{2a}\right)$$

M_T étant la masse de la Terre.

Dans le cas d'une orbite basse circulaire, $a \approx R_T$ et bien sûr

$$E_F \approx \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R_T} = E_c$$

Pour une orbite circulaire de rayon R_{sat} ,

$$E_F = m\frac{GM_T}{R_T}\left(1 - \frac{R_T}{2R_{sat}}\right)$$

1.2 Trajectoire déduite de la loi de conservation de l'énergie

À partir des deux constantes dynamiques auxquelles satisfait le mouvement, on peut en déduire la trajectoire du corps de masse m .

• L'accélération centrale en $1/\rho^2$ a conduit à la deuxième constante dynamique qui s'écrit :

$$\frac{E}{m} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{\rho}$$

soit, en explicitant V^2 :

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{\mu}{\rho} = \frac{2E}{m}$$

• La première constante dynamique provient du fait qu'un mouvement à accélération centrale satisfait à la loi des aires :

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C \quad ; \text{ ainsi, } \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\rho^2} \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{C}{\rho^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Posant $u = \frac{1}{\rho}$, on obtient la relation : $C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + C^2 u^2 - 2\mu u = \frac{2E}{m}$

que l'on transforme comme suit : $\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - 2\frac{\mu}{C^2} u + \frac{\mu^2}{C^4} = \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2E}{mC^2}$

d'où l'équation différentielle finale :

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \left(u - \frac{\mu}{C^2} \right)^2 = \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2E}{mC^2}$$

Une solution réelle est possible pour

$$E \geq -\frac{1}{2} m \frac{\mu^2}{C^2}$$

Elle s'écrit :

$$u = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2E}{mC^2}} \cos(\theta - \theta_0)$$

soit finalement, en réintroduisant le rayon ρ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{C^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \frac{C^2}{\mu^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]$$

La solution est effectivement une conique dont un foyer est l'origine des rayons vecteurs, et pour laquelle la constante d'intégration θ_0 est l'angle du grand axe avec l'axe origine Ox.

Par identification avec $\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{p}$ on déduit :

paramètre $p = \frac{C^2}{\mu}$

excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{2E C^2}{m \mu^2}}$

On rappelle que la constante B introduite au chapitre 3, paragraphe 2.3, correspond à $e \frac{\mu}{C^2}$.

On retrouve $E = \frac{1}{2} m \frac{\mu^2}{C^2} (e^2 - 1) \geq -\frac{1}{2} m \frac{\mu^2}{C^2}$ soit $E = \frac{1}{2} m \frac{\mu}{p} (e^2 - 1)$

2 Vitesses et trajectoires

2.1 Vitesses cosmiques

■ 1^{re} vitesse cosmique

Pour une orbite circulaire à accélération centrale, la composante tangentielle Γ_τ de l'accélération est nulle puisque le rayon est constant : $\rho = R$, (voir chapitre 4).

Dans le cas où cette accélération centrale est en $1/\rho^2$, il vient par conséquent :

$$\vec{\Gamma} = \frac{V^2}{R} \vec{n} = -\frac{GM}{R^2} \vec{I} \text{ avec bien sûr } \vec{n} = -\vec{I} \text{ d'où on tire : } V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

V correspond, au signe près, à la racine carrée du potentiel gravitationnel.

Pour un satellite de la Terre orbitant à l'altitude h , $R = R_T + h$, et :

$$V = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{R_T}}}$$

On pose : $V_{\min} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ (on a vu que $G = 6,672\,59 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}/\text{kg}$)

Cette vitesse représente la **vitesse minimale de satellisation sur Terre** ; elle correspond au cas d'une orbite circulaire rasante ($h = 0$).

Pour la Terre,

$$M_T = 5,973\,64 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$GM_T = 3,985\,97 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

(les calculs doivent se faire avec $\mu_T = 3,986\,004\,418 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$)

$$R_T = 6,378\,14 \times 10^6 \text{ m}$$

L'application numérique donne : $V_{\min}(\text{Terre}) = 7,9054 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Plus h croît, plus la vitesse de satellisation diminue, pour tendre vers 0 lorsque h tend vers l'infini.

Pour un satellite en orbite basse, tel que :

$$h = 800 \text{ km} \quad \text{il vient} \quad V_{\min, h} = 7,452 \text{ km.s}^{-1}$$

Cette vitesse $V_{\min}$ est aussi dénommée d'une façon générale **1^{re} vitesse cosmique**. Pour une planète quelconque :

$$V_{\min}(P) = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}}$$

■ 2^e vitesse cosmique

C'est la vitesse qu'il faut communiquer à un satellite lancé du sol de la planète pour qu'il tende vers l'infini avec une vitesse nulle.

- Détermination par des considérations énergétiques.

L'énergie cinétique est donc nulle à l'infini, et comme l'énergie potentielle l'est également, on en déduit que l'énergie du satellite sur sa trajectoire est nulle.

Au sol, lorsque le satellite est lancé, on a l'identité :

$$E = -m \frac{GM_p}{R_p} + \frac{1}{2} m V^2 \equiv 0$$

La vitesse conduisant à une trajectoire à énergie nulle est appelée **vitesse de libération**, que l'on notera V_{lib} .

$$V_{\text{lib}}(P) = \sqrt{2 \frac{GM_p}{R_p}} = \sqrt{2} V_{\min}(P)$$

c'est la **2^e vitesse cosmique**.

Pour un satellite de la Terre $V_{\text{lib}}(\text{Terre}) = 11,179 \text{ 9 km.s}^{-1}$

- Détermination par des considérations aux limites.

Pour une trajectoire elliptique, nous avons établi, quant aux rayons :

$$\rho_0 = \frac{p}{1+e} \quad \rho_\pi = \frac{p}{1-e} \quad \rightarrow \quad \rho_\pi = \rho_0 \frac{1+e}{1-e}$$

Quant aux vitesses (voir chapitre 3, paragraphe 3) :

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \sqrt{1+e} \quad V_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_\pi}} \sqrt{1-e} \quad \rightarrow \quad V_\pi = V_0 \frac{1-e}{1+e}$$

Si l'excentricité tend vers l'unité, la trajectoire tend vers une parabole, et :

$$p = ek \rightarrow k \quad \rho_0 \rightarrow \frac{k}{2} = R_p \quad \rho_\pi \rightarrow \infty$$

(Le périastre ρ_0 du satellite est supposé égal au rayon R_p de la planète P considérée.)

$$V_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{R_p}} \sqrt{2} = \sqrt{2 \frac{GM_p}{R_p}} = V_{\text{lib}}(P) \quad V_\pi \rightarrow V_\infty = 0$$

- La figure 7.1 donne les trajectoires et les vitesses correspondant à l'éloignement maximum en fonction de la **vitesse de lancement** au sol V_0 .

L'excentricité des trajectoires n'est fonction que du rapport $V_0 / V_{\min}$; en effet :

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} \sqrt{1+e} \rightarrow e = \left(\frac{V_0}{V_{\min}} \right)^2 - 1$$

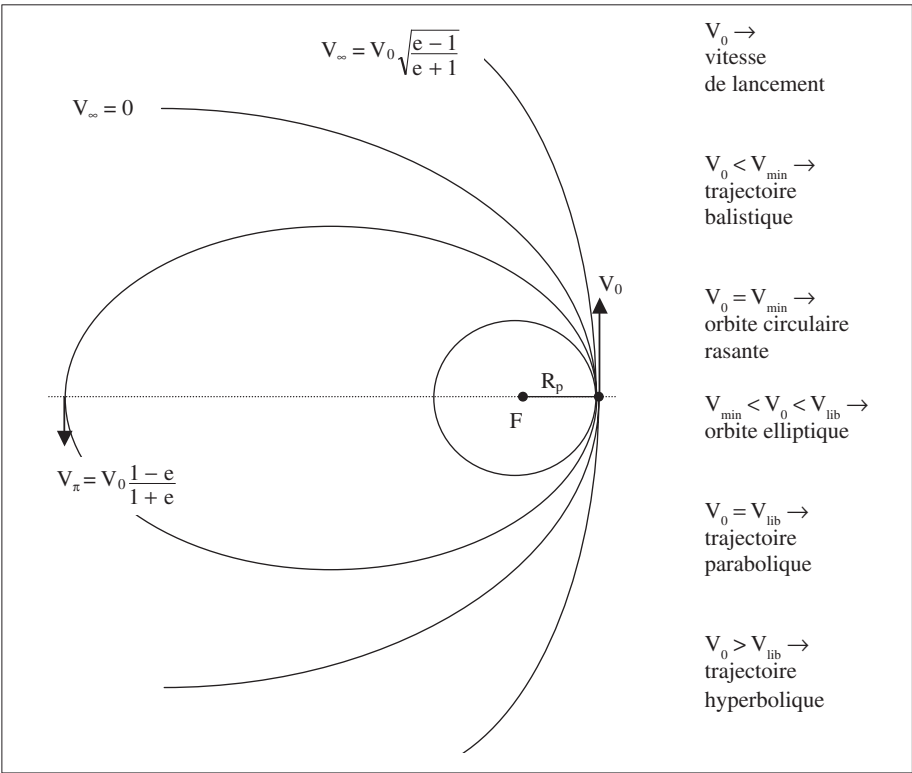


Figure 7.1 Trajectoires déduites de la vitesse de lancement.

On termine sur les vitesses cosmiques en dressant le tableau de leurs valeurs pour les huit premières planètes du système solaire :

Planète	C ^{tte} de la gravitation	Rayon équatorial R_p (km)	1 ^{re} & 2 ^e vitesse cosmique	
	μ_p (km ³ .s ⁻²)		$V_{\min}(P)$ (km.s ⁻¹)	$V_{\text{lib}}(P)$ (km.s ⁻¹)
Mercure	$2,203\,208 \times 10^4$	2 440	3,005	4,250
Vénus	$3,248\,586 \times 10^5$	6 052	7,327	10,361
Terre	$3,986\,004 \times 10^5$	6 378	7,905	11,180
Mars	$4,282\,831 \times 10^4$	3 397	3,551	5,021
Jupiter	$1,266\,865 \times 10^8$	71 492	42,096	59,532
Saturne	$3,793\,12 \times 10^7$	60 268	25,087	35,479
Uranus	$5,793\,939 \times 10^6$	25 559	15,056	21,293
Neptune	$6,835\,107 \times 10^6$	24 764	16,614	23,495

2.2 Paramètres altitude et vitesse de lancement

• Soit h l'altitude de lancement et V_h la vitesse de lancement, à partir d'une planète de masse M_p et de rayon R_p .

Pour $h = 0$,

$$\text{on a déterminé : } V_{\min} = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} \quad V_{\text{lib}} = \sqrt{2} V_{\min}$$

V_0 , la vitesse de lancement, satisfait à :

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} \sqrt{1+e} = V_{\min} \sqrt{1+e}$$

Pour h quelconque, on note :

$$V_{\min h} = V_{\min} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{R_p}}} \quad V_{\text{lib}h} = \sqrt{2} V_{\min h}$$

et

$$V_h = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p + h}} \sqrt{1+e} = V_{\min h} \sqrt{1+e}$$

On déduit l'excentricité, c'est-à-dire le type de trajectoire, en fonction de la vitesse de lancement et de la première vitesse cosmique à l'altitude considérée :

$$e = \left(\frac{V_h}{V_{\min h}} \right)^2 - 1$$

et on calcule :

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{V_h^2}{V_{\text{lib}h}^2 - V_h^2} = \frac{1}{\left(\frac{V_{\text{lib}h}}{V_h} \right)^2 - 1} \text{ soit } \frac{\rho_\pi}{R_p + h} \text{ dans le cas de l'ellipse.}$$

Il vient :

$$\rho_0 \rightarrow \rho_h = R_p + h \text{ (donnée)}$$

$$\rho_\pi = (R_p + h) \frac{1}{\left(\frac{V_{\text{lib}h}}{V_h} \right)^2 - 1} \text{ (ellipse)}$$

$$V_0 \rightarrow V_h \text{ (donnée)}$$

$$V_\pi = V_h \left[\left(\frac{V_{\text{lib}h}}{V_h} \right)^2 - 1 \right] = V_h \frac{R_p + h}{\rho_\pi} \text{ (ellipse)}$$

$$V_{\theta \rightarrow \theta_m} = V_\infty = V_h \sqrt{1 - \left(\frac{V_{\text{lib}h}}{V_h} \right)^2} \text{ (hyperbole)}$$

En ce qui concerne la trajectoire parabolique, $e = 1$, d'où on en déduit que $V_h = V_{\text{libh}}$ et par conséquent $V_\infty = 0$.

• Donnons également les expressions de l'énergie massique et de la période en fonction de la vitesse de lancement V_h et des vitesses cosmiques à l'altitude h .

Énergie

$$E = -\frac{1}{2}m\mu \frac{1-e^2}{p} = -\frac{1}{2}mGM_p \frac{1+e}{p}(1-e)$$

avec
$$\frac{1+e}{p} = \frac{1}{R_p + h}$$

$$\frac{E}{m} = -\frac{1}{2}V_{\text{minh}}^2 \left[2 - \left(\frac{V_h}{V_{\text{minh}}} \right)^2 \right]$$

On retiendra comme expression de l'énergie massique :

$$\frac{E}{m} = -\frac{1}{2}V_h^2 \left[\left(\frac{V_{\text{libh}}}{V_h} \right)^2 - 1 \right]$$

et on vérifie que dans le cas de l'ellipse, c'est-à-dire, pour $V_h < V_{\text{libh}}$:

$$\frac{E}{m} = -\frac{1}{2}V_h V_\pi$$

Période

La 3^e loi de Kepler conduit à $T = 2\pi\mu \left(\frac{a}{\mu} \right)^{3/2}$ Or $\frac{E}{m} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{a}$

Ainsi, dans le cas d'une trajectoire elliptique, on a :

$$T = 2\pi\mu \left(\frac{m}{2|E|} \right)^{3/2} = 2\pi GM_p \left(\frac{1}{V_{\text{libh}}^2 - V_h^2} \right)^{3/2}$$

On retiendra comme expression de la période :

$$T = 2\pi(R_p + h) \frac{V_{\text{minh}}^2}{(V_{\text{libh}}^2 - V_h^2)^{3/2}}$$

• Avant de clore ce paragraphe, remarquons que pour certains problèmes les données sont l'altitude de lancement h et le point le plus éloigné du foyer ρ_π . On détermine alors V_h par la relation déduite de l'expression de ρ_π :

$$V_h = V_{\text{libh}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_p + h}{\rho_\pi}}}$$

Calculons par exemple la vitesse V_h à communiquer à un satellite pour qu'il atteigne l'**orbite géostationnaire** en une demi-période.

Les données du problème sont :

$$h = 200 \text{ km}$$

$$\rho_\pi = 42\,164 \text{ km (rayon de l'orbite géostationnaire, voir exercice E7-1).}$$

Pour la Terre, la vitesse de libération à l'altitude h est :

$$V_{\text{lib } h} = 11,180 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{R_T}}} \text{ km.s}^{-1}$$

Sachant que $R_T = 6\,378 \text{ km}$, on obtient : $V_{\text{lib } h} = 11,009 \text{ km.s}^{-1}$

d'où finalement : $V_h = 10,239 \text{ km.s}^{-1}$

À partir de V_h et des vitesses cosmiques à l'altitude h , on détermine le temps nécessaire pour atteindre l'orbite géostationnaire à l'aide de l'expression précédente de la période. On calcule ainsi :

$$T / 2 = 18\,932 \text{ s} = 5 \text{ h } 15 \text{ min } 32 \text{ s}$$

➤ Remarques

1– Les exercices E7-1 et E9-3 concernent des satellites en orbite géostationnaire, c'est-à-dire sur une **orbite géosynchrone** située dans le plan équatorial et dont l'excentricité est nulle. Avec l'exercice E11-1 on traitera d'orbites semi-synchrones...

2– C'est le britannique Sir Arthur Charles Clarke, né en 1917, qui, dans un article publié dans le *Wireless World* en 1945, proposa d'utiliser des satellites en orbite géostationnaire pour les télécommunications.

Le calcul d'une telle orbite, souvent baptisée **orbite de Clarke**, avait été effectué dans un ouvrage, *Le Problème du Voyage Spatial*, publié à Berlin en 1928. L'auteur en était Herman Potocnik (1892-1929) également connu sous son pseudonyme de Noordung. Le russe Konstantin Tsiolkovsky (1857-1935) avait déjà eu l'idée de ce type d'orbite.

Le premier satellite de télécommunication vraiment stationnaire, c'est-à-dire dont l'inclinaison de l'orbite par rapport au plan équatorial est négligeable, est le Syncom 3, lancé par les États-Unis en 1964 pour les jeux olympiques de Tokyo.

Actuellement, avec plus de 180 satellites en exploitation, on assiste à l'engorgement de l'orbite géostationnaire.

exercices

E7-1 Satellite géostationnaire

1.

a) Calculer l'altitude et la vitesse d'un satellite géostationnaire en utilisant les formules générales dans lesquelles $e \rightarrow 0$.

b) Établir directement les formules dans le cas particulier.

2.

a) Calculer les énergies massiques (potentielle, cinétique et mécanique).

b) Dresser un tableau de ces trois énergies en fonction de l'état du satellite : repos au sol, en orbite géostationnaire ; en déduire les variations de ces énergies.

3. Donner l'expression littérale de l'énergie fournie en fonction des rayons terrestre et orbital d'une part et des vitesses cosmique (1^{re}) et orbitale d'autre part.

Données numériques :

– constante géocentrique de la gravitation $\mu_T = 3,986\,004\,418 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

– rayon équatorial $R_T = 6,378\,14 \times 10^6 \text{ m}$

– jour sidéral terrestre $T = 86\,164,095\,6 \text{ s}$.

solutions

1.

a) Rayon R_{sat} , altitude H_{sat} et vitesse V_{sat}

• Considérations préliminaires :

$$\mu_T = 398\,600,4418 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2} \quad R_T = 6\,378,14 \text{ km}$$

La période du satellite géostationnaire est par définition égale à la période de rotation de la Terre : le satellite est **synchrone** de la Terre, c'est-à-dire **géosynchrone** et $T = 86\,164,0956 \text{ s}$.

L'orbite, dans le plan équatorial, tend vers un cercle : dans les formules générales $e \rightarrow 0$.

• Calcul de R_{sat}

$$\text{La 3}^{\text{e}} \text{ loi de Kepler s'écrit : } \mu_T = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

$$\text{Or quand } e \rightarrow 0, \quad a = \frac{p}{1 - e^2} \rightarrow p = R_{\text{sat}}$$

$$\text{Il vient donc : } R_{\text{sat}} = \left(\frac{\mu_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}, \text{ soit } R_{\text{sat}} = 42\,164 \text{ km} \approx 6,61 R_T$$

$$H_{\text{sat}} = R_{\text{sat}} - R_T \rightarrow H_{\text{sat}} = 35\,786 \text{ km}$$

• Calcul de V_{sat}

Les formules de Binet ont conduit à

$$V^2 = \frac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e \cos \theta) = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \theta}{1 - e^2}$$

Or $a = \left(\frac{\mu_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$ on déduit donc :

$$V^2 = \left(2\pi \frac{\mu_T}{T} \right)^{2/3} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \theta}{1 - e^2}$$

$$e \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow V_{\text{sat}} = \left(2\pi \frac{\mu_T}{T} \right)^{1/3} \quad \text{soit } V_{\text{sat}} = 3,075 \text{ km/s}$$

b) Calcul direct de R_{sat} et V_{sat}

L'accélération du satellite est centripète et a pour valeur $\frac{V_{\text{sat}}^2}{R_{\text{sat}}}$; elle est égale à l'accélération centrale $\frac{\mu_T}{R_{\text{sat}}^2}$. On déduit : $V_{\text{sat}}^2 = \frac{\mu_T}{R_{\text{sat}}}$

D'autre part la vitesse du satellite, qui est constante, est liée à la période par la relation :

$$V_{\text{sat}} = \frac{2\pi R_{\text{sat}}}{T}$$

On en déduit facilement R_{sat} et V_{sat} en fonction de μ_T et T .

2.**a) Énergie potentielle E_p , cinétique E_c et totale (mécanique) E**

$$E_p/m = -\frac{\mu_T}{R_{\text{sat}}} = -V_{\text{sat}}^2 = -9,454 \text{ MJ/kg} = -2 E_c/m = E_p/m$$

$$E_c/m = \frac{1}{2} \frac{\mu_T}{R_{\text{sat}}} = \frac{1}{2} V_{\text{sat}}^2 = +4,727 \text{ MJ/kg} = E_c/m = -\frac{1}{2} E_p/m$$

$$E/m = -\frac{1}{2} \frac{\mu_T}{R_{\text{sat}}} = -\frac{1}{2} V_{\text{sat}}^2 = -4,727 \text{ MJ/kg} = -E_c/m = \frac{1}{2} E_p/m$$

b) Tableau des énergies

Il faut au préalable calculer $E_p(R_T) = -m \frac{GM_T}{R_T}$, qui représente l'énergie potentielle du satellite au sol.

AN par unité de masse : $-\frac{GM_T}{R_T} = -62,495 \text{ MJ/kg}$

État du satellite \ Énergie	$\frac{E_p}{m} = -\frac{GM_T}{R}$	$\frac{E_c}{m} = \frac{1}{2}V^2$	$\frac{E}{m} = \frac{E_p}{m} + \frac{E_c}{m}$
Repos au sol (*) $R = R_T$ V supposée nulle	- 62,495	0	- 62,495
Orbite géostationnaire $R = R_{sat}$ $V = V_{sat}$	- 9,454	+ 4,727	- 4,727
Variation d'énergie	+ 53,041	+ 4,727	+ 57,768

(*) Voir plus loin exercice E9-2.

3. Énergie fournie E_F

$$E_F = E - E_p(R_T) \rightarrow \frac{E_F}{m} = -\frac{1}{2} \frac{GM_T}{R_{sat}} + \frac{GM_T}{R_T}$$

$$\rightarrow \frac{E_F}{m} = \frac{GM_T}{R_T} \left(1 - \frac{R_T}{2R_{sat}} \right)$$

La première vitesse cosmique est : $V_{min} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$

d'autre part : $V_{sat} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{sat}}}$

On en tire : $\frac{V_{sat}^2}{V_{min}^2} = \frac{R_T}{R_{sat}}$ et $\frac{E_F}{m} = V_{min}^2 - \frac{1}{2}V_{sat}^2$

On remarquera que lorsque le rayon de l'orbite circulaire passe de R_T à l'infini :

$\rightarrow V_{sat}$ décroît de V_{min} à 0

$\rightarrow E_F/m$ croît de $\frac{1}{2}V_{min}^2$ à V_{min}^2

E7-2 Transfert d'orbite de Hohmann

Walter Hohmann étudia au début des années 1920 la manœuvre la plus économique qui permettrait de faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse à l'orbite géostationnaire. Il en conclut que l'orbite de transfert était une ellipse dont le demi-grand axe était égal à la demi-somme des rayons des deux orbites circulaires.

1.

- Déterminer les vitesses sur l'orbite basse et sur l'orbite géostationnaire.
- Calculer le demi-grand axe de l'orbite de transfert et la vitesse sur cette orbite ; en déduire les vitesses au périégée et à l'apogée.
- Quels sont les accroissements de vitesse que l'on doit communiquer au satellite au périégée et à l'apogée ?
- Représenter les orbites sachant que le lancement s'effectue vers l'Est.

2.

a) Quelles sont les énergies massiques sur les orbites basse, de transfert et géostationnaire ? En déduire les accroissements d'énergie massique à communiquer au périgée et à l'apogée.

b) Quelle est la durée du transfert de Hohmann ?

3. La vitesse atteinte à l'apogée est inférieure de ΔV_{12} à la vitesse initialement calculée.

a) Expliquer pourquoi l'origine de cet écart est dû à une altitude de lancement insuffisante ; calculer Δh_1 .

b) Calculer les accroissements de vitesse effectivement communiqués au satellite afin qu'il soit quand même géostationnaire.

c) Calculer les nouveaux accroissements d'énergie massique nécessaires et les comparer aux valeurs nominales.

Données numériques :

– $\mu_T = 3,986\,004\,418\,10^5 \text{ km}^3.\text{s}^{-2}$; rayon terrestre $R_T = 6\,378,14 \text{ km}$

– altitude de l'orbite basse $h_1 = 200 \text{ km}$

– altitude de l'orbite géostationnaire $h_2 = 35\,786,03 \text{ km}$

– $\Delta V_{12} = 5 \text{ m.s}^{-1}$.

solutions

1. Vitesses et orbites

a) Vitesses V_1 et V_2

Orbite circulaire basse :

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + h_1}} = V_{\min} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_1}{R_T}}} \rightarrow V_1 = 7,7843 \text{ km.s}^{-1}$$

Orbite géostationnaire :

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + h_2}} = V_{\min} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_2}{R_T}}} \rightarrow V_2 = 3,0747 \text{ km.s}^{-1}$$

b) **Orbite de transfert**

Demi-grand axe :

$$a_t = \frac{(R_T + h_1) + (R_T + h_2)}{2} = R_T + \frac{h_1 + h_2}{2} \rightarrow a_t = 24\,371 \text{ km}$$

La trajectoire étant elliptique,

$$V_t^2 = \mu_T \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a_t} \right) \text{ avec } \rho = R_T + h \rightarrow V_t = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + h} \left(2 - \frac{R_T + h}{a_t} \right)^{1/2}}$$

D'où les vitesses au périégée et à l'apogée :

$$h = h_1 \rightarrow V_{t1} = V_1 \sqrt{2 - \frac{R_T + h_1}{a_t}} \rightarrow V_{t1} = 10,2388 \text{ km.s}^{-1}$$

$$h = h_2 \rightarrow V_{t2} = V_2 \sqrt{2 - \frac{R_T + h_2}{a_t}} \rightarrow V_{t2} = 1,5974 \text{ km.s}^{-1}$$

c) Accroissements Δ de vitesse

Au périégée, il faut un premier allumage du moteur du satellite pour que sa vitesse passe de V_1 à V_{t1} :

$$\Delta V_1 = V_{t1} - V_1 \rightarrow \Delta V_1 = 2,4546 \text{ km.s}^{-1}$$

À l'apogée, il faut un deuxième allumage du moteur du satellite pour que sa vitesse passe de V_{t2} à V_2 :

$$\Delta V_2 = V_2 - V_{t2} \rightarrow \Delta V_2 = 1,4773 \text{ km.s}^{-1}$$

d) Les trajectoires demandées en 1. sont représentées sur la figure 7.2.

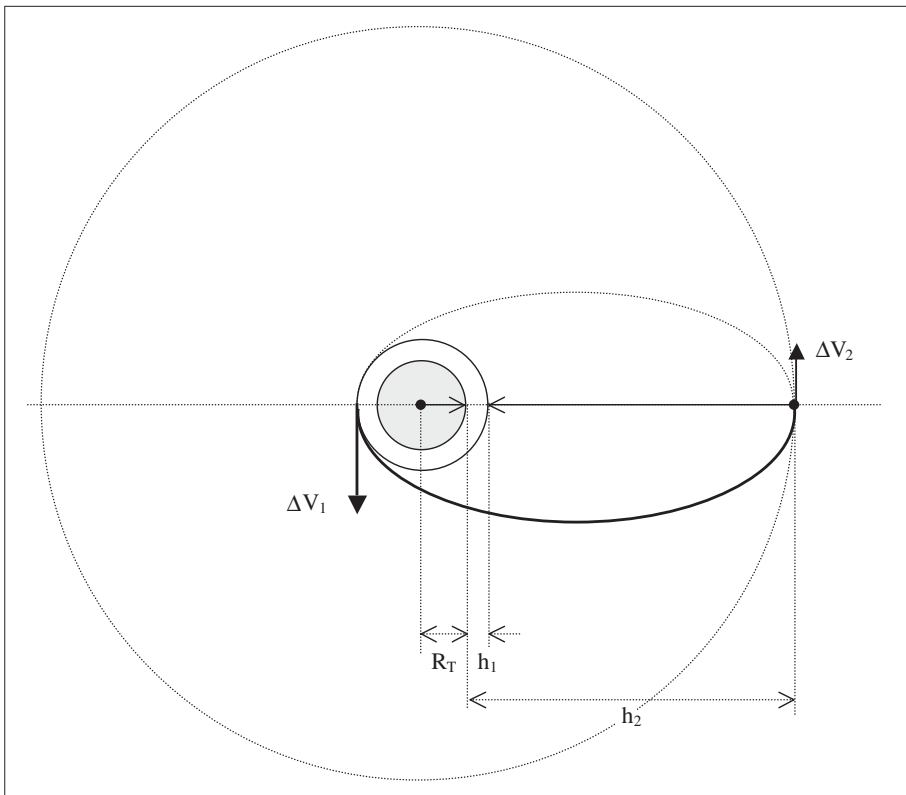


Figure 7.2 L'astrodynamicien allemand Walter Hohmann publie en 1925 *La possibilité d'atteindre les corps célestes*, ouvrage dans lequel il calcule les trajectoires permettant d'atteindre une planète ou une orbite donnée avec un minimum d'énergie. On a ici l'exemple du transfert de l'orbite basse à l'orbite géostationnaire.

2. Énergies et durée du transfert

a) Énergies massiques

On utilise la formule $E = -\frac{1}{2}m\frac{\mu}{a}$, en notant que μ/a est égal au produit des vitesses au périégée et à l'apogée (voir par exemple au paragraphe 2.2 du présent chapitre ou au paragraphe 3.1 du chapitre 3) :

– sur l'orbite basse :

$$\frac{E_1}{m} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_T}{R_T + h_1} = -\frac{1}{2} V_1^2 \quad \rightarrow \quad E_1/m = -30,2974 \text{ MJ/kg}$$

– sur l'orbite de transfert :

$$\frac{E_t}{m} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_T}{a_t} = -\frac{1}{2} V_{t1} V_{t2} \quad \rightarrow \quad E_t/m = -8,1777 \text{ MJ/kg}$$

– sur l'orbite géostationnaire :

$$\frac{E_2}{m} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_T}{R_T + h_2} = -\frac{1}{2} V_2^2 \quad \rightarrow \quad E_2/m = -4,7268 \text{ MJ/kg}$$

Les accroissements d'énergie massique à communiquer sont :

$$\text{au périégée : } \frac{\Delta E_1}{m} = \frac{E_t}{m} - \frac{E_1}{m} \quad \rightarrow \quad \Delta E_1/m = +22,1196 \text{ MJ/kg}$$

$$\text{à l'apogée : } \frac{\Delta E_2}{m} = \frac{E_2}{m} - \frac{E_t}{m} \quad \rightarrow \quad \Delta E_2/m = +3,4509 \text{ MJ/kg}$$

b) Durée du transfert

Elle est égale à la demi-période de l'ellipse de transfert :

$$\frac{T}{2} = \pi \frac{a_t^{3/2}}{\sqrt{\mu_T}} = \pi \mu_T \left(\frac{m}{2|E_t|} \right)^{3/2} = \pi \frac{\mu_T}{(V_{t1} V_{t2})^{3/2}} = 18\,932 \text{ s}$$

$$\rightarrow \quad T/2 = 5 \text{ h } 15 \text{ min } 32 \text{ s}$$

3. Cas non nominal

a) Erreur Δh_1

En utilisant une notation plus explicite, on déduit :

$$(V_{t2} - \Delta V_{t2})^2 = 2\mu_T \left(\frac{1}{R_T + h_2} - \frac{1}{2a'_1} \right) < V_{t2}^2$$

Par conséquent : $2a'_1 < 2a_t \rightarrow$ le satellite n'a été lancé qu'à l'altitude $h_1 - \Delta h_1$.
L'accroissement de vitesse au périégée a toutefois été corrigée pour que le satellite atteigne quand même l'altitude h_2 .

On calcule :

$$\frac{(V_{t2} - \Delta V_{t2})^2}{2\mu_T} = \frac{1}{R_T + h_2} - \frac{1}{2a_t - \Delta h_1}$$

On déduit par conséquent :

$$\Delta h_1 = 2a_t + \frac{1}{\frac{(V_{t2} - \Delta V_{t2})^2}{2\mu_T} - \frac{1}{R_T + h_2}}$$

relation que l'on peut également mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta h_1}{2a_t} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{2a_t}{R_T + h_2} - 1\right)\left(1 - \frac{\Delta V_{t2}}{V_{t2}}\right)^2 - \frac{2a_t}{R_T + h_2}}$$

Pour $\Delta V_{t2} = 5 \text{ m.s}^{-1}$, on calcule :

$$\Delta h_1 = 47,5 \text{ km}$$

b) Nouveaux accroissements Δ de vitesse

À l'apogée, l'accroissement de vitesse à communiquer est :

$$\Delta V'_2 = V_2 - (V_{t2} - \Delta V_{t2}) = \Delta V_2 + \Delta V_{t2} \rightarrow \Delta V'_2 = 1,4823 \text{ km.s}^{-1}$$

Au périgée, l'accroissement de vitesse à communiquer est :

$$\Delta V'_1 = V'_{t1} - V'_1 ; V'_{t1} = \frac{R_T + h_2}{R_T + h_1 - \Delta h_1} (V_{t2} - \Delta V_{t2})$$

$$V'_{t1} = 10,2810 \text{ km.s}^{-1}$$

$$V'_1 = \sqrt{\frac{\mu_T}{R_T + h_1 - \Delta h_1}}$$

$$V'_1 = 7,8125 \text{ km.s}^{-1}$$

d'où l'accroissement

$$\Delta V'_1 = 2,4685 \text{ km.s}^{-1}$$

Ainsi, par rapport à l'altitude de lancement nominale, il faut communiquer au satellite un accroissement de vitesse supplémentaire de $13,9 \text{ m.s}^{-1}$ au périgée et de 5 m.s^{-1} à l'apogée.

c) Nouveaux accroissements d'énergie massique

$$\text{On calcule : } \frac{E'_1}{m} = -\frac{1}{2} V_1'^2 = -30,5176 \text{ MJ/kg}$$

$$\frac{E'_t}{m} = -\frac{1}{2} V'_{t1} V'_{t2} = -8,1857 \text{ MJ/kg}$$

Les nouveaux accroissements d'énergie massique à communiquer sont :

$$\text{– au périgée : } \frac{\Delta E'_1}{m} = \frac{E'_t}{m} - \frac{E'_1}{m} = +22,3318 \text{ MJ/kg}$$

soit $+212 \text{ kJ/kg}$ par rapport au nominal ;

$$- \text{à l'apogée : } \frac{\Delta E_2'}{m} = \frac{E_2}{m} - \frac{E_t'}{m} = + 3,4588 \text{ MJ/kg}$$

soit + 8 kJ/kg par rapport au nominal.

E7-3 Trajectoire à énergie minimale vers Mars

On envoie une **sonde** sur Mars en lui faisant suivre une trajectoire elliptique telle que le périhélie soit égal à la distance Terre-Soleil et l'aphélie égale à la distance Mars-Soleil. Dans le référentiel héliocentrique de la trajectoire, on fait abstraction des attractions gravitationnelles des 2 planètes sur la sonde.

1. Déterminer, puis calculer :

- a) le demi-grand axe, l'excentricité et le paramètre de la trajectoire de la sonde ;
- b) les vitesses au périhélie et à l'aphélie, ainsi que la constante des aires ;
- c) les **vitesses d'entraînement** dues à la rotation de chacune des planètes autour du Soleil (on précisera la période sidérale de Mars en fonction de celle de la Terre).

2.

a) On se place dans le référentiel terrestre au voisinage de la Terre. Que représente la différence entre la vitesse au périhélie et la vitesse d'entraînement ? En déduire la **vitesse d'injection** à communiquer à la sonde à l'altitude h pour qu'à l'infini elle possède cette vitesse relative. Comparer la vitesse d'injection à la vitesse de libération à la même altitude.

b) On se place maintenant dans le référentiel martien. Quelle est la vitesse relative de la sonde ? Quelle sera la vitesse d'arrivée sur la planète ? En déduire la vitesse à communiquer pour se poser en douceur.

3.

a) Quelle est la durée du voyage ?

b) Déterminer en fonction des rayons au périhélie et à l'aphélie l'angle initial (ST, SM) des deux planètes, puis l'angle de rotation de la Terre à la fin du transfert ; calculer ces angles et représenter les trajectoires ainsi que les positions initiales et finales des deux planètes.

Données numériques :

- $\mu_s = 1,327 \times 10^{11} \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
- distance Terre-Soleil $\rho_T = 1,000 \text{ ua}$; distance Mars-Soleil $\rho_M = 1,524 \text{ ua}$
- $1 \text{ ua} = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$
- année sidérale $T_T = 365,26 \text{ jours}$
- vitesse minimale de satellisation sur Terre $V_{\min} = 7,905 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
- rayon terrestre $R_T = 6378 \text{ km}$; altitude d'injection $h = 300 \text{ km}$
- vitesse de libération sur Mars $= V_{\text{lib}} = 5,021 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

solutions

1. Caractérisation de l'ellipse et vitesses d'entraînement

a) Demi-grand axe a , excentricité e , paramètre p

$$a_t = \frac{\rho_T + \rho_M}{2} \rightarrow a_t = 1,888 \times 10^8 \text{ km}$$

$$\text{Au périhélie } \rho_T = \frac{p}{1+e} ; \text{ à l'aphélie } \rho_M = \frac{p}{1-e}, \text{ d'où } \frac{\rho_T}{\rho_M} = \frac{1-e}{1+e} ;$$

on déduit :

$$e = \frac{\rho_M - \rho_T}{\rho_M + \rho_T} \rightarrow e = 0,208$$

$$p = \rho_T(1+e), \text{ or } 1+e = \frac{2\rho_M}{\rho_M + \rho_T} ; \text{ on déduit l'expression du paramètre :}$$

$$p = 2 \frac{\rho_T \rho_M}{\rho_T + \rho_M} \rightarrow p = 1,208 \text{ ua} = 1,807 \times 10^8 \text{ km}$$

b) Vitesses V_p au périhélie et V_A à l'aphélie, constante C des aires

$$\text{Les vitesses se déduisent de la formule } V^2 = \mu \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right)$$

$$V_p = \sqrt{\mu_s \left(\frac{2}{\rho_T} - \frac{1}{a_t} \right)} = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_T} \frac{2\rho_M}{\rho_T + \rho_M}} \rightarrow V_p = 32,73 \text{ km.s}^{-1}$$

$$V_A = \sqrt{\mu_s \left(\frac{2}{\rho_M} - \frac{1}{a_t} \right)} = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_M} \frac{2\rho_T}{\rho_T + \rho_M}} \rightarrow V_A = 21,48 \text{ km.s}^{-1}$$

On vérifie au passage que $\rho_T V_p = \rho_M V_A$;

$$C = \sqrt{\mu_s p} = \sqrt{2\mu_s \frac{\rho_T \rho_M}{\rho_T + \rho_M}} \rightarrow C = 4,896 \times 10^9 \text{ km}^2.\text{s}^{-1}$$

c) Vitesses d'entraînement V_T et V_M

• La Terre tourne autour du Soleil en un an (vitesse ω_T , période T_T) et dans le référentiel héliocentrique il faut tenir compte de la vitesse d'entraînement communiquée à la sonde :

$$V_T = \rho_T \omega_T = \rho_T \frac{2\pi}{T_T} = 1,496 \times 10^8 \times 2\pi / (365,26 \times 86400) \text{ km.s}^{-1} \\ \rightarrow V_T = 29,78 \text{ km.s}^{-1}$$

On vérifie, voir exercice E3-2, que $29,29 \text{ km.s}^{-1} < V_T < 30,29 \text{ km.s}^{-1}$; par ailleurs,

on rappelle que $V_T = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_T}}$: l'année sidérale est une donnée redondante !

- La vitesse d'entraînement due à la planète Mars est :

$$V_M = \rho_M \omega_M = \rho_M \frac{2\pi}{T_M} = \frac{\rho_M}{\rho_T} \frac{T_T}{T_M} V_T$$

Or, la troisième loi de Kepler permet d'écrire $\frac{T_M^2}{\rho_M^3} = \frac{T_T^2}{\rho_T^3}$, d'où :

$$T_M = \left(\frac{\rho_M}{\rho_T} \right)^{3/2} T_T \quad \rightarrow \quad T_M = 1,881 T_T$$

$$\text{AN : } V_M = (1,524/1,881) V_T \quad \rightarrow \quad V_M = 24,13 \text{ km.s}^{-1}$$

On note que $21,97 \text{ km.s}^{-1} < V_M < 26,50 \text{ km.s}^{-1}$ et on rappelle que

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu_S}{\rho_M}} = \sqrt{\frac{\rho_T}{\rho_M}} V_T$$

2. Vitesses dans les référentiels terrestre et martien

a) *Vitesse relative $V_\infty(T)$, vitesse d'injection V_I , vitesse de libération $V_{\text{lib.h}}$*

- La sonde, lancée de la terre a bénéficié de la vitesse d'entraînement V_T , et dans le référentiel terrestre sa vitesse relative est :

$$V_\infty = V_P - V_T \quad \rightarrow \quad V_\infty(T) = 2,94 \text{ km.s}^{-1}$$

La trajectoire elliptique n'étant pas influencée par la Terre, cette vitesse relative est donc la vitesse à l'infini d'une trajectoire hyperbolique terrestre.

- Écrivant la conservation de l'énergie (cinétique plus potentielle) sur une telle trajectoire hyperbolique, il vient :

$$\frac{V_I^2}{2} - \frac{\mu_T}{R_T + h} = \frac{V_\infty^2}{2} \quad \text{soit} \quad V_I = \sqrt{\frac{2\mu_T}{R_T + h} + V_\infty^2}$$

Pour l'application numérique, on note que :

$$2 \frac{\mu_T}{R_T + h} = 2V_{\text{min}}^2 \frac{1}{1 + h / R_T} \quad \rightarrow \quad V_I = 11,32 \text{ km.s}^{-1}$$

- La formule donnant $V_{\text{lib.h}}$ est :

$$V_{\text{lib.h}} = \sqrt{2} V_{\text{min}} \sqrt{\frac{1}{1 + h / R_T}} \quad \rightarrow \quad V_{\text{lib.h}} = 10,93 \text{ km.s}^{-1}$$

➤ **Remarque**

$$V_I = \sqrt{V_{\text{lib.h}}^2 + V_\infty^2}$$

b) Vitesses, relative V_∞ , d'arrivée V_{arv} , à communiquer V_{com}

- Mars s'approche de la sonde à la vitesse V_M , et la vitesse relative est :

$$V_\infty = V_M - V_A \quad \rightarrow \quad V_\infty(M) = 2,66 \text{ km.s}^{-1}$$

- La conservation de l'énergie sur une trajectoire hyperbolique martienne permet d'accéder à V_{arv} :

$$\frac{V_{\text{arv}}^2}{2} - \frac{\mu_M}{R_M} = \frac{V_\infty^2}{2} \quad \text{d'où} \quad V_{\text{arv}} = \sqrt{V_{\text{lib}}^2(M) + V_\infty^2(M)}$$

$$\rightarrow \quad V_{\text{arv}} = 5,68 \text{ km.s}^{-1}$$

L'idéal pour se poser en douceur étant d'arriver à vitesse nulle, la vitesse à communiquer sera :

$$V_{\text{com}} = -5,68 \text{ km.s}^{-1}$$

3. Durée du voyage et position des planètes au départ et à l'arrivée de la sonde

a) Durée D_M du voyage

La date du lancement a été choisie de façon à ce que la sonde partant du périhélie soit rattrapée par la planète Mars à l'aphélie :

$$D_M = \frac{1}{2}T = \pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu_s}} = 22\,372 \times 10^3 \text{ s} \rightarrow \quad D_M = 259 \text{ j}$$

La 3^e loi de Kepler permet aussi d'écrire :

$$\frac{T^2}{a_t^3} = \frac{T_T^2}{\rho_T^3} \rightarrow D_M = \frac{T_T}{2} \sqrt{\frac{a_t^3}{\rho_T^3}} = \frac{T_T}{2} \left(\frac{\rho_T + \rho_M}{2\rho_T} \right)^{3/2}$$

b) Angle initial θ_M des 2 planètes, angle de rotation θ_T de la Terre à l'issue du transfert

- $\theta_M = (ST, SM)$; durant la durée D_M du transfert, Mars décrit donc l'angle $\pi - \theta_M$ autour du Soleil. Il en découle les relations :

$$\frac{\pi - \theta_M}{2\pi} = \frac{D_M}{T_M} = \frac{D_M}{T_T} \left(\frac{\rho_T}{\rho_M} \right)^{3/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_T + \rho_M}{2\rho_T} \right)^{3/2} \left(\frac{\rho_T}{\rho_M} \right)^{3/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_T + \rho_M}{2\rho_M} \right)^{3/2}$$

soit :

$$\theta_M = \pi \left[1 - \left(\frac{\rho_T + \rho_M}{2\rho_M} \right)^{3/2} \right] \quad \rightarrow \quad \theta_M = 44^\circ,36$$

- L'angle du rayon Soleil-Terre à l'issue du transfert avec le rayon au départ satisfait à :

$$\frac{\theta_T}{2\pi} = \frac{D_M}{T_T} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_T + \rho_M}{2\rho_T} \right)^{3/2} \quad \text{d'où :}$$

$$\theta_T = \pi \left(\frac{\rho_T + \rho_M}{2\rho_T} \right)^{3/2} \quad \rightarrow \quad \theta_T = 255^\circ,19$$

- Schéma :

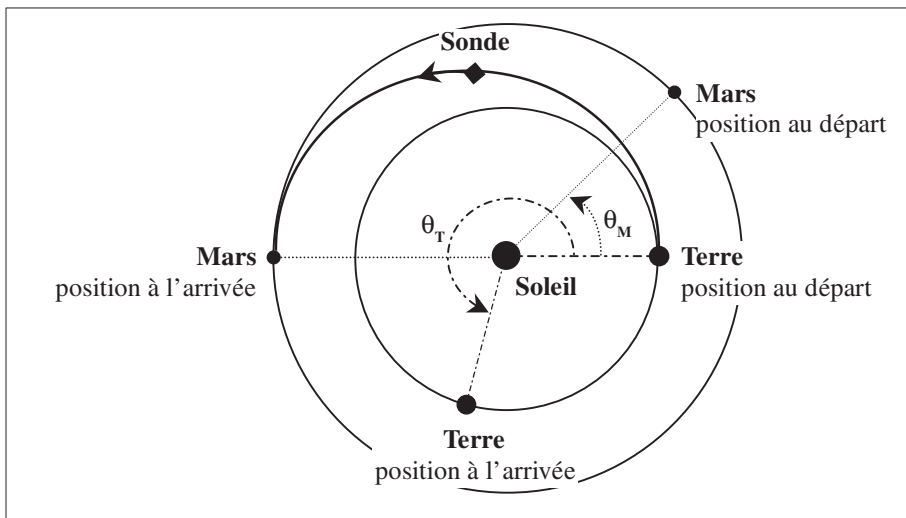


Figure 7.3 Trajectoire de la sonde et positions des planètes au départ et à la fin du voyage. La conjonction des deux planètes se produit 96,1 jours après le départ et Mars a alors tourné de $50^\circ,33$.

➤ Remarques

1— Ce problème donne un aperçu de la méthode de calcul de la **trajectoire à énergie minimale** ; il devra être repris en tenant compte du fait que les orbites réelles de la Terre et de Mars sont elliptiques et qu'elles ne sont pas dans un même plan. Il faudra alors connaître la date du lancement correspondant à une configuration initiale des deux planètes par rapport au Soleil, qui ne se produit que tous les 780 jours (voir exercice E1-2).

2— Les trajectoires réelles nécessitent plus d'énergie car la vitesse d'injection est plus élevée, mais elles permettent plus de souplesse sur la date du tir. Un autre avantage est que si l'orbite choisie intercepte Mars avant l'aphélie, la durée du voyage pour une telle trajectoire tendue peut être sensiblement inférieure à 260 jours.

E7-4 Interaction sonde-planète

1. Trajectoire relative

Dans sa trajectoire elliptique de foyer le Soleil, la sonde est rattrapée par Mars au voisinage de l'aphélie, où elle a la vitesse V_A , celle de Mars étant V_M .

a) Quelle est la vitesse d'approche V_∞ de la sonde dans un repère galiléen centré sur Mars ?

La constante gravitationnelle de la planète étant μ_M , calculer la quantité $r = \mu_M / V_\infty^2$.

b) Initialement, la sonde est suffisamment éloignée de Mars pour être considérée à l'infini en P avec la vitesse V_∞ . Justifier en conséquence la trajectoire et la tracer avec ses asymptotes. On précise que le **paramètre d'impact**, c'est-à-dire la distance du support du vecteur vitesse à l'infini avec le centre M de Mars, est d.

c) Calculer le paramètre p et l'excentricité e, les exprimer en fonction de r et d.

2. Distance minimale à Mars

a) On choisit l'axe polaire de la trajectoire $\rho = f(\theta)$ tel que la distance minimale $\rho_{\min}$ au centre M de Mars soit obtenue pour $\theta = 0$. Écrire l'équation de la trajectoire et calculer $\rho_{\min}$, dont on donnera une expression non fractionnaire en fonction de r et d.

b) Dédurre l'équation du second degré dont $\rho_{\min}$ est solution et donner la valeur du paramètre d'impact en deçà de laquelle la sonde heurterait la planète dont le rayon est R_M .

c) On se propose d'obtenir d'une autre façon cette équation du second degré :

- exprimer la constante des aires en P (infini) et T (distance minimale), et en déduire la vitesse tangentielle V_T en T ;
- écrire la conservation de l'énergie mécanique massique en P et T ;
- établir la relation entre V_∞ , d et $\rho_{\min}$ et conclure.

3. Déviation gravitationnelle

Après être passée au plus près de Mars, la sonde continue à l'infini avec la vitesse $\vec{V}'_\infty$.

a) Caractériser $\vec{V}'_\infty$ en module et direction par rapport à $\vec{V}_\infty$; on appelle D l'angle des deux asymptotes.

b) Préciser la vitesse $\vec{V}'_A$ de la sonde dans le référentiel de Copernic ; on appelle α l'angle des vitesses $\vec{V}'_A$ et $\vec{V}_A$.

4. Satellisation

Si on avait voulu satelliser la sonde en T sur une orbite circulaire :

a) Comment aurait-il fallu modifier la vitesse V_T ?

b) Quelle aurait été la variation d'énergie massique ? Donner l'expression littérale et faire l'application numérique.

Données : $V_A = 21,48 \text{ km s}^{-1}$ $V_M = 24,13 \text{ km s}^{-1}$ $d = 8\,000 \text{ km}$
 $\mu_M = 4,282\,8314 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ $R_M = 3\,397 \text{ km}$

solutions

1. Trajectoire relative

a) Les vitesses de la sonde et de Mars sont parallèles :

$$V_\infty = V_M - V_A \rightarrow V_\infty = 2,65 \text{ km/s}$$

Par définition $r = \mu_M / V_\infty^2 \rightarrow r = 6\,099 \text{ km}$

b) Par rapport à Mars, la sonde en P est considérée à l'infini et son énergie mécanique est simplement égale à son énergie cinétique :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} V_\infty^2 > 0$$

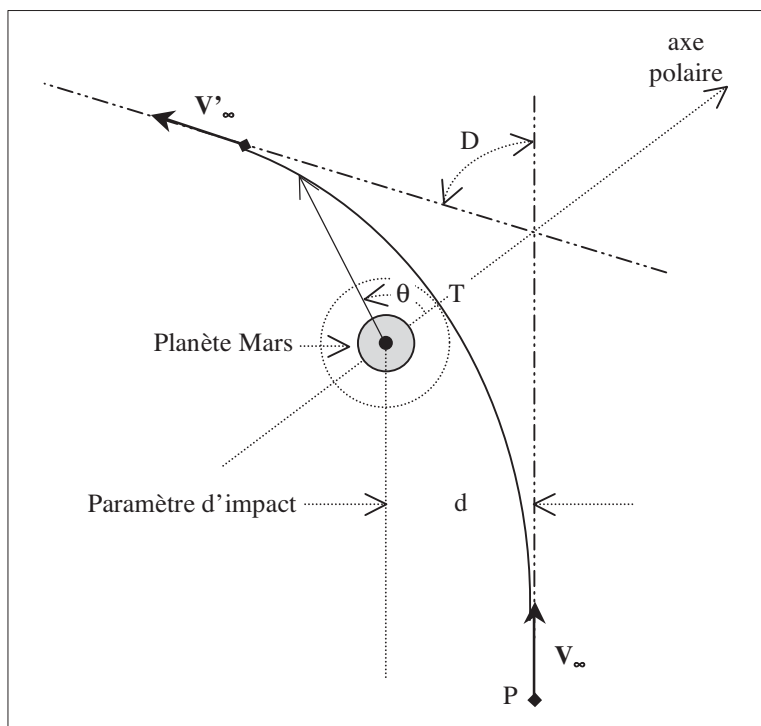


Figure 7.4 Déviation gravitationnelle relative.

Lorsqu'elle pénètre dans la « **sphère d'influence** » de Mars, la sonde est soumise à sa force d'attraction centrale en $1/\rho^2$.

Par conséquent dans le référentiel martien la trajectoire est une **conique**, et comme l'énergie est positive, il s'agit d'une **hyperbole**.

c) On a vu au chapitre 3 que $p = \frac{C^2}{\mu_M}$; or la constante des aires a pour expression :

$$C = \|\overline{MP} \wedge \vec{V}_\infty\| = MP \cdot V_\infty \cdot \sin(\overline{MP}, \vec{V}_\infty) \quad \text{avec} \quad \sin(\overline{MP}, \vec{V}_\infty) = \frac{d}{MP}$$

Ainsi,

$$C = dV_\infty \quad \rightarrow \quad C = 21\,200 \text{ km}^2/\text{s}$$

On déduit :

$$p = \frac{d^2 V_\infty^2}{\mu_M} = \frac{d^2}{r} \quad \rightarrow \quad p = 10\,494 \text{ km}$$

En fonction de l'excentricité, l'énergie massique a pour expression (voir chapitre 7, paragraphe 1.1) : $\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \mu_M \frac{e^2 - 1}{p}$; c'est une constante du mouvement égale à $\frac{1}{2} V_\infty^2$.

Ainsi :

$$e^2 - 1 = \frac{d^2 V_\infty^4}{\mu_M^2} = \frac{p}{r} = \frac{d^2}{r^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{d^2}{r^2}} \quad \rightarrow \quad e = 1,649$$

2. Distance minimale à Mars

a) L'équation de la trajectoire est $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

et on déduit $\rho_{\min} = \frac{p}{1 + e}$

$$\rho_{\min} = \frac{\frac{d^2}{r}}{1 + \sqrt{1 + \frac{d^2}{r^2}}} = r \left(\sqrt{1 + \frac{d^2}{r^2}} - 1 \right)$$

On retiendra :

$$\rho_{\min} = -r + \sqrt{d^2 + r^2} \quad \rightarrow \quad \rho_{\min} = 3\,961 \text{ km}$$

Notons que l'altitude $h_{\min}$ de la sonde est :

$$h_{\min} = \rho_{\min} - R_M \quad \rightarrow \quad h_{\min} = 564 \text{ km}$$

b) Le rayon minimum satisfait à l'équation du second degré :

$$\rho_{\min}^2 + 2r\rho_{\min} - d^2 = 0$$

On en déduit l'expression du **paramètre d'impact** :

$$d = \sqrt{\rho_{\min}(\rho_{\min} + 2r)}$$

La sonde heurtera la planète dès que $\rho_{\min} < R_M$; la valeur limite de d est :

$$d_M = \sqrt{R_M(R_M + 2r)} \rightarrow d_M = 7\,279 \text{ km}$$

c)

– La vitesse V_T se déduit de la constante des aires exprimée en P et T :

$$C = dV_{\infty} = \rho_{\min} \cdot V_T$$

D'où :

$$V_T = \frac{d}{\rho_{\min}} V_{\infty} \rightarrow V_T = 5,35 \text{ km/s}$$

– La conservation de l'énergie mécanique massique en P et T permet d'écrire l'égalité :

$$\frac{1}{2} V_{\infty}^2 = \frac{1}{2} V_T^2 - \frac{\mu_M}{\rho_{\min}} \quad \text{et compte tenu de l'expression de } V_T, \text{ il vient :}$$

$$\rho_{\min}^2 V_{\infty}^2 = d^2 V_{\infty}^2 - 2\mu_M \rho_{\min}$$

Divisant par V_{∞}^2 on retrouve bien l'équation du second degré à laquelle satisfait $\rho_{\min}$.

D'autre part on déduit :

$$V_{\infty}^2 = \frac{2\mu_M \rho_{\min}}{d^2 - \rho_{\min}^2}$$

3. Déviation gravitationnelle

a) Vu la conservation de l'énergie mécanique sur la trajectoire hyperbolique, les modules des vitesses à l'infini sont égaux :

$$V'_{\infty} = V_{\infty} \rightarrow V'_{\infty} = 2,65 \text{ km/s}$$

L'angle des deux vecteurs vitesse à l'infini est égal à l'angle D des deux asymptotes. Soit θ_{∞} l'angle polaire rendant le rayon infini, il satisfait à $1 + e \cos \theta_{\infty} = 0$; d'où :

$$\cos \theta_{\infty} = -\frac{1}{e} \rightarrow \theta_{\infty} = \pm 127^{\circ},32$$

D'autre part :

$D = \pi - 2(\pi - \theta_{\infty}) = 2\theta_{\infty} - \pi$; compte tenu que $e^2 - 1 = p/r$, on déduit les égalités :

$$\cos D = -\cos 2\theta_{\infty} = 1 - 2\cos^2 \theta_{\infty} = 1 - \frac{2}{e^2} = \frac{p-r}{p+r} = \frac{d^2 - r^2}{d^2 + r^2}$$

$$\sin D = \frac{2\sqrt{pr}}{p+r} = \frac{2dr}{d^2+r^2}$$

Pour l'angle moitié, on obtient facilement $\cos \frac{D}{2} = \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$, $\sin \frac{D}{2} = \frac{1}{e}$, et

$$\operatorname{tg} \frac{D}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} = \sqrt{\frac{r}{p}} = \frac{r}{d} = \frac{\mu_M}{dV_\infty^2}$$

D'une façon ou d'une autre, on calcule $D = 74^\circ,64$

b) Avant l'interaction, les vecteurs $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_M$ étaient colinéaires ; après l'interaction on a la relation :

$$\vec{V}'_A = \vec{V}'_\infty + \vec{V}_M$$

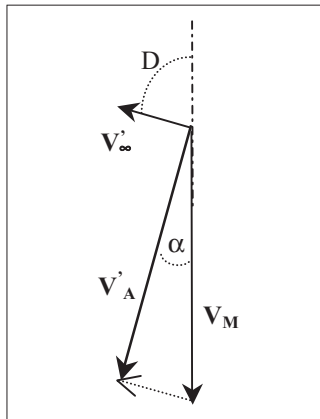


Figure 7.5 Passage au référentiel de Copernic.

La formule du cosinus dans le triangle de la figure 7.5 donne :

$$V_A'^2 = V_\infty'^2 + V_M^2 - 2V_\infty'V_M \cos D$$

soit

$$V_A'^2 = V_\infty'^2 + V_M^2 - 2V_\infty'V_M \frac{d^2 - r^2}{d^2 + r^2}$$

$$V_A' = 23,57 \text{ km / s} ; \text{ on note que } V_A' > V_A.$$

On appelle α l'angle du vecteur $\vec{V}'_A$ avec $\vec{V}_M$ ou $\vec{V}_A$; la formule du sinus donne :

$$\frac{\sin \alpha}{V_\infty'} = \frac{\sin D}{V_A'} ; \text{ exprimant le sinus on en déduit :}$$

$$\sin \alpha = \frac{V_\infty'}{V_A'} \frac{2dr}{d^2 + r^2} = \frac{2drV_\infty'}{\sqrt{(V_\infty'^2 + V_M^2)(d^2 + r^2)^2 - 2V_\infty'V_M(d^4 - r^4)}}$$

$$\rightarrow \alpha = 6^\circ,225$$

La connaissance de $\vec{V}'_A$ à l'aphélie permet de déterminer la nouvelle trajectoire de la sonde (voir exercice E8-3).

4. Satellisation

a) Sur l'orbite circulaire,

$$V'_T = \sqrt{\frac{\mu_M}{\rho_{\min}}} \rightarrow V'_T = 3,29 \text{ km/s} \text{ or } V_T = 5,35 \text{ km/s}$$

Il faut donc freiner la sonde par une poussée dirigée vers l'avant, afin qu'elle perde la vitesse :

$$\Delta V_T = V_T - V'_T \rightarrow \Delta V_T = 2,06 \text{ km/s}$$

b) Sur l'orbite circulaire, l'énergie mécanique massique est :

$$\frac{E'}{m} = \frac{1}{2} V_T'^2 - \frac{\mu_M}{\rho_{\min}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_M}{\rho_{\min}} < 0 \quad \frac{E'}{m} = -5,407 \text{ MJ/kg}$$

initialement, elle valait :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} V_\infty^2 = \frac{\mu_M \rho_{\min}}{d^2 - \rho_{\min}^2} > 0 \quad \frac{E}{m} = +3,511 \text{ MJ/kg}$$

Il y a eu perte $\Delta E = E - E'$ d'énergie, soit :

$$\frac{\Delta E}{m} = \frac{1}{2} \frac{\mu_M}{\rho_{\min}} \frac{d^2 + \rho_{\min}^2}{d^2 - \rho_{\min}^2} \rightarrow \frac{\Delta E}{m} = 8,918 \text{ MJ/kg}$$

➤ Remarques

1– Pour un observateur Martien, l'énergie mécanique de la sonde n'a pas varié : la sonde s'éloigne à l'infini avec la même vitesse sur trajectoire qu'elle avait en venant de l'infini.

Pour un observateur lié au Soleil, Mars, en interagissant avec la sonde, a modifié la vitesse de celle-ci en grandeur et direction. Dans ce problème, la planète rattrape la sonde, qui voit en conséquence sa vitesse s'accroître de 2,09 km/s et dévier de plus de 6° ; cela se fait au détriment de l'énergie de la planète : cette perte infinitésimale d'énergie provenant du travail des forces gravitationnelles non nul dans le repère de Copernic.

2– Des sondes se servent effectivement de cet « **effet catapulte** » provoqué par la gravitation des planètes afin de voyager dans le système solaire sans consommer d'énergie embarquée.

Ainsi la sonde Voyager 2 lancée le 20 août 1977 est passée à 71 400 km de Jupiter le 9 juillet 1979 ; ensuite, profitant d'une configuration favorable, elle a pu « sauter » d'une planète à la suivante : elle s'est approchée à

environ 100 000 km de Saturne et d'Uranus, respectivement le 25 août 1981 et le 24 janvier 1986. Le 24 août 1989 elle frôlait Neptune à 48 000 km ...

3— Revenant à la satellisation, on notera que c'est la sonde Mariner 9 de la NASA qui pour la première fois a été mise en orbite autour de Mars en novembre 1971. Son périastre était à 1380 km d'altitude et son apoastre à 17 080 km, ce qui correspondait ainsi à une période semi-synchrone de celle de la Terre.

Fin 2001, utilisant le freinage atmosphérique afin d'économiser du propergol, Mars Odyssey a été placée en orbite circulaire de période légèrement inférieure à 2 h. La sonde a d'abord été ralentie par son moteur principal afin d'être capturée par la gravité de Mars. **L'orbite d'insertion** fortement elliptique a ensuite été progressivement **circularisée** par freinages successifs lors du passage dans l'atmosphère de la planète : par une poussée initiale, le périastre était placé à 120 km d'altitude, et ensuite chaque passage dans l'atmosphère avait pour conséquence d'abaisser l'apoastre jusqu'à ce qu'il atteigne les 400 km désirés ; le périastre était alors remonté par l'application d'une autre poussée.

Chapitre 8

Formules pour mouvement elliptique

Dans les problèmes liés aux trajectoires et aux positions à un instant donné des planètes ou satellites sur celles-ci, il convient de disposer rapidement des formules adaptées afin de s'éviter de fastidieux calculs. Tout au long des chapitres précédents, nous nous sommes efforcés de fournir de nombreuses relations que nous complétons ici par un formulaire en première partie du présent chapitre. La deuxième partie permet d'accéder au périmètre de la trajectoire elliptique en fonction de l'excentricité et à l'aire d'un secteur balayé par le rayon polaire.

Si les deux premiers exercices viennent compléter ce formulaire, les suivants vont au-delà en nous permettant de déterminer des trajectoires à partir d'un minimum de données.

Au premier exercice, nous établissons un ensemble de formules permettant de caractériser un mouvement elliptique en fonction des rayons au péricentre et à l'apocentre, ainsi que de la vitesse au péricentre. Avec le

deuxième, la caractérisation se fait en fonction de la période et des vitesses au péricentre et à l'apocentre. Le troisième exercice nous propose un retour sur la comète de Halley, déjà rencontrée à l'exercice E5-1, et dont on précise la trajectoire à partir de la simple connaissance du rayon et du vecteur vitesse en un point donné. Il sera suivi d'un dernier exercice qui traitera de la trajectoire héliocentrique de la sonde *Giotto* à partir de la connaissance des rayons vecteurs au départ de la Terre et au passage au voisinage de la comète. Il s'agit en fait du problème de Lambert qui sera résolu à l'aide d'un tableur.

Ce chapitre termine une première partie de l'ouvrage où nous avons étudié en coordonnées polaires les mouvements plans découlant d'une accélération centrale. Il convient maintenant de situer ces mouvements dans d'autres repères appropriés : ce sera principalement l'objet des trois chapitres qui suivront.

1 Formulaire déduit du paramétrage

1.1. Relations en fonction de la période T , du demi-grand axe a , de l'excentricité e

- Constante des aires

$$C = 2\pi \frac{ab}{T} \quad \text{avec} \quad b = a\sqrt{1-e^2} \quad \rightarrow \quad C = 2\pi \frac{a^2}{T} \sqrt{1-e^2}$$

- Trajectoire

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad \text{avec} \quad p = a(1-e^2) \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

On déduit :

$$\rho_0 = a(1-e) \quad \rho_\pi = a(1+e) \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} = a$$

- Vitesses

$$V = \frac{C}{p} \sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}$$

$$\rightarrow \quad V = \frac{2\pi a}{T} \frac{\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}{\sqrt{1-e^2}}$$

On déduit :

$$V_0 = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad V_\pi = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{V_0 V_\pi} = \frac{2\pi a}{T}$$

- Coefficient de l'accélération centrale

$$\rightarrow \quad \mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

- Énergie

$$E = -\frac{1}{2} m \frac{\mu}{a} \quad \text{avec} \quad \frac{\mu}{a} = 4\pi^2 \frac{a^2}{T^2}$$

$$\rightarrow \quad E = -\frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 = -\frac{1}{2} m V_0 V_\pi$$

➤ Remarque

$$T = 2\pi \frac{\frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2}}{\sqrt{V_0 V_\pi}}$$

1.2. Relations en fonction de la constante d'accélération μ , du demi-grand axe a , de l'excentricité e

- Constante des aires

$$C = \sqrt{\mu p} \quad \text{avec} \quad p = a(1 - e^2) \quad \rightarrow \quad C = \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2}$$

- Trajectoire

$$(\text{voir paragraphe 1.1}) \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

On déduit :

$$\rho_0 = a(1 - e) \quad \rho_\pi = a(1 + e) \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} = a$$

- Vitesses

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}$$

$$\rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

On déduit :

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad V_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{V_0 V_\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

- Période

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\mu} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

- Énergie

$$\rightarrow \quad E = -\frac{1}{2} m \frac{\mu}{a}$$

1.3 Relations en fonction de la constante d'accélération μ , de l'énergie massique $\frac{E}{m}$, de l'excentricité e

- Constante des aires

$$C = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{m}{2|E|} \mu$$

$$\rightarrow \quad C = \mu \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \sqrt{1 - e^2}$$

• Trajectoire

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad \rightarrow \quad \rho = \mu \frac{m}{2|E|} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta}$$

On déduit :

$$\rho_0 = \mu \frac{m}{2|E|} (1 - e) \quad \rho_\pi = \mu \frac{m}{2|E|} (1 + e)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} = \mu \frac{m}{2|E|}$$

• Vitesses

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}}$$

$$\rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2|E|}{m} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}}$$

On déduit :

$$V_0 = \sqrt{\frac{2|E|}{m}} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad V_\pi = \sqrt{\frac{2|E|}{m}} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{V_0 V_\pi} = \sqrt{\frac{2|E|}{m}}$$

• Période

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \mu \left(\frac{m}{2|E|} \right)^{3/2}$$

1.4. Relations en fonction de la constante d'accélération μ , de la période T , de l'excentricité e

• Constante des aires

$$C = \mu \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \sqrt{1 - e^2} \quad \text{avec} \quad \sqrt{\frac{m}{2|E|}} = \left(\frac{T}{2\pi \mu} \right)^{1/3}$$

$$\rightarrow \quad C = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1/3} \mu^{2/3} \sqrt{1 - e^2}$$

• Trajectoire

$$\rho = \mu \frac{m}{2|E|} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} \quad \rightarrow \quad \rho = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} \mu^{1/3} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta}$$

On déduit :

$$\rho_0 = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} \mu^{1/3} (1 - e) \quad \rho_\pi = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} \mu^{1/3} (1 + e)$$

$$\rightarrow \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{2/3} \mu^{1/3}$$

• Vitesses

$$V = \sqrt{\frac{2|E|}{m}} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\rightarrow V = \left(\frac{T}{2\pi\mu} \right)^{-1/3} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

On déduit :

$$V_0 = \left(\frac{T}{2\pi\mu} \right)^{-1/3} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad V_\pi = \left(\frac{T}{2\pi\mu} \right)^{-1/3} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$\rightarrow \sqrt{V_0 V_\pi} = \left(\frac{T}{2\pi\mu} \right)^{-1/3}$$

• Énergie

$$\sqrt{\frac{m}{2|E|}} = \left(\frac{T}{2\pi\mu} \right)^{1/3} \quad \rightarrow \quad \frac{E}{m} = -\frac{1}{2} \left(\frac{T}{2\pi\mu} \right)^{-2/3}$$

1.5. Relations en fonction de la période T, de l'énergie massique $\frac{E}{m}$, de l'excentricité e

• Constante des aires

$$C = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1/3} \mu^{2/3} \sqrt{1 - e^2} \quad \text{avec} \quad \sqrt{\frac{m}{2|E|}} = \left(\frac{T}{2\pi\mu} \right)^{1/3}$$

$$\rightarrow C = \frac{T}{2\pi} \frac{2|E|}{m} \sqrt{1 - e^2}$$

• Trajectoire

$$\rho = \mu \frac{m}{2|E|} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2|E|}{m}} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta}$$

On déduit :

$$\rho_0 = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2|E|}{m}} (1 - e) ; \quad \rho_\pi = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2|E|}{m}} (1 + e)$$

$$\rightarrow \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2|E|}{m}}$$

• Vitesses

(voir 1.3)

$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{2|E|}{m} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2|E|}{m} \frac{\sqrt{1 + e}}{\sqrt{1 - e}}} \quad V_\pi = \sqrt{\frac{2|E|}{m} \frac{\sqrt{1 - e}}{\sqrt{1 + e}}}$$

$$\rightarrow \sqrt{V_0 V_\pi} = \sqrt{\frac{2|E|}{m}}$$

• Coefficient de l'accélération centrale

$$T = 2\pi\mu \left(\frac{m}{2|E|} \right)^{3/2} \rightarrow \mu = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{2|E|}{m} \right)^{3/2}$$

2 Longueur et surface des orbites elliptiques

2.1 Longueur de l'orbite

■ *Rappel des formules mathématiques*

Longueur d'un arc de courbe

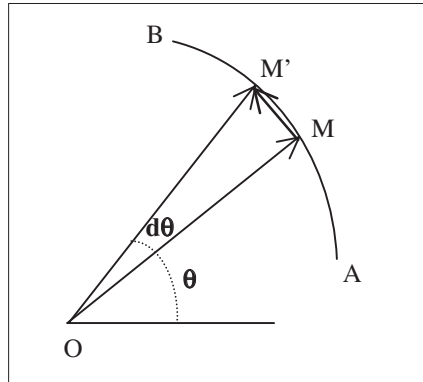


Figure 8.1 Arc de courbe élémentaire.

Le rayon vecteur $\overline{OM}$ est fonction du paramètre θ :

$$\overline{OM} = \vec{F}(\theta),$$

ainsi (voir figure 8.1) :

$$\overline{MM'} = d\overline{OM} = \vec{F}(\theta + d\theta) - \vec{F}(\theta)$$

La longueur de l'arc AB a pour expression :

$$l_{AB} = \int_A^B \|d\overline{OM}\| = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \|\vec{F}'(\theta)\| d\theta$$

Expression en coordonnées polaires

Se référant à la figure 3.4, on écrit :

$$\overline{OM} = \vec{F}(\theta) = \rho \vec{I}$$

d'où : $\vec{F}'(\theta) = \rho' \vec{I} + \rho \vec{J}$ ce qui conduit à $l_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta$

Expression en coordonnées paramétriques

Dans le repère $\{O, x, y\}$ de base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, les coordonnées de $\overline{OM}$ fonction du paramètre φ sont :

$$| x = x(\varphi)$$

$$| y = y(\varphi)$$

d'où :

$$\vec{F}(\varphi) = x(\varphi)\vec{i} + y(\varphi)\vec{j} \text{ et } \vec{F}'(\varphi) = x'(\varphi)\vec{i} + y'(\varphi)\vec{j}$$

Par conséquent : $l_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} d\varphi$

■ **Application à l'ellipse**

Expression en coordonnées polaires

Le rayon vecteur a pour expression $\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

de dérivée $\rho'(\theta) = \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$

La longueur de l'arc d'ellipse est donc :

$$l_{AB} = p \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta$$

Or la formule de Binet relative à la vitesse nous a permis d'établir que :

$$V(\theta) = \frac{C}{p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta} \quad C \text{ étant la constante des aires.}$$

Ainsi, faisant apparaître également $\rho(\theta)$, il vient :

$$l_{AB} = \frac{1}{C} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \rho^2(\theta) V(\theta) d\theta$$

Expression en coordonnées paramétriques

En fonction de l'anomalie excentrique φ , on note :

$$\vec{F}(\varphi) = a \cos \varphi \vec{i} + b \sin \varphi \vec{j}$$

$$\vec{F}'(\varphi) = -a \sin \varphi \vec{i} + b \cos \varphi \vec{j}$$

d'où l'on tire :

$$l_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

Exprimons cette intégrale en fonction du paramètre p et de l'excentricité e .

Notant que :

$$\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \quad , \text{ avec } a = \frac{p}{1 - e^2}$$

il en découle les égalités :

$$l_{AB} = a \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{p}{1 - e^2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

Expression à partir de la vitesse

Si $\vec{V}$ est la vitesse en M, la longueur élémentaire dl va s'écrire :

$$dl = \|\vec{V}\| \cdot dt = V dt = \sqrt{V_p^2 + V_\theta^2} dt$$

ce qui pour une accélération centrale en $1/\rho^2$ conduit à (voir chapitre 3, paragraphe 4) :

$$dl = \frac{C}{p} \sqrt{e^2 \sin^2 \theta + (1 + e \cos \theta)^2} dt = \frac{C}{p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta(t)} dt$$

Or $CT = 2\pi ab = 2\pi \frac{p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$

Ainsi $dl = \frac{2\pi p}{(1 - e^2)^{3/2}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta(t)} \frac{dt}{T}$

On note maintenant que d'après l'équation de Kepler,

$$2\pi \frac{dt}{T} = (1 - e \cos \varphi) d\varphi$$

D'autre part $\frac{1 + e^2 + 2e \cos \theta}{1 - e^2} = \frac{1 + e \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi}$

On retrouve donc la longueur élémentaire en coordonnées paramétriques :

$$dl = \frac{p}{1 - e^2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

■ *Approche du périmètre*

Les fonctions élémentaires existantes ne permettent pas d'obtenir une formule exacte donnant le périmètre de l'ellipse.

Obtention par développement en série d'une intégrale elliptique

- Partant de l'expression de la longueur d'un arc d'ellipse en fonction de l'anomalie excentrique φ , et introduisant le paramètre t tel que :

$$t = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

on a bien sûr $\sin \varphi = \cos t$ et $\cos \varphi = -\sin t$, et on déduit :

$$l_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = a \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$$

L'intégrale elliptique de deuxième espèce se note $E(\tau, e)$,

$$E(\tau, e) = \int_0^\tau \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$$

Compte tenu des symétries, le périmètre P a donc pour expression :

$$P = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt = 4a E(\pi/2, e) = 4a E(e)$$

• $E(e)$ admet un développement en série entière de l'excentricité e :

$$E(e) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 e^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 e^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 e^6 - \frac{1}{7} \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \right)^2 e^8 - \dots \right]$$

et le terme général du crochet a pour expression : $-\frac{1}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right)^2 e^{2n}$

Écrivant sous forme de fractions rationnelles irréductibles les coefficients des puissances de e , le périmètre pourra se calculer comme suit :

$$\frac{P}{2\pi a} = 1 - \frac{1}{2^2} e^2 - \frac{3}{8^2} e^4 - \frac{5}{16^2} e^6 - \frac{175}{128^2} e^8 - \frac{441}{256^2} e^{10} - \frac{4851}{1024^2} e^{12} - \dots$$

Lorsque : $e \rightarrow 0$ (ellipse « ronde ») $P \rightarrow 2\pi a$

$e \rightarrow 1$ (ellipse « plate ») $P \rightarrow 4a$

Pour les faibles valeurs de l'excentricité, la convergence est rapide ; il n'en est pas de même pour les valeurs s'approchant de l'unité.

Expressions en fonction des demi-grand axe et petit axe

• Le périmètre peut également être obtenu par la série de Gauss-Kummer.

Introduisant le paramètre $u = \frac{a-b}{a+b}$, il vient :

$$P = \pi(a+b) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 u^2 + \frac{1}{3^2} \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 u^4 + \frac{1}{5^2} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 u^6 + \frac{1}{7^2} \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \right)^2 u^8 - \dots \right]$$

soit :

$$\frac{P}{\pi(a+b)} = 1 + \frac{1}{2^2}u^2 + \frac{1}{8^2}u^4 + \frac{1}{16^2}u^6 + \frac{25}{128^2}u^8 + \frac{49}{256^2}u^{10} + \frac{441}{1024^2}u^{12} - \dots$$

• D'autre part Ramanujan, mathématicien indien du siècle dernier, donna des formules approximatives du périmètre en fonction de a, b et éventuellement

$$\text{de } h = u^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

– Première **formule de Ramanujan** :

$$P \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(a+3b)(3a+b)} \right] = \pi(a+b) \left[3 - \sqrt{4-h} \right]$$

– Deuxième formule de Ramanujan :

$$P \approx \pi(a+b) \left[1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4-3h}} \right]$$

■ *Longueur d'orbites planétaires*

• Dans le tableau suivant, on donne pour les huit premières planètes la longueur de l'orbite en unité astronomique et la vitesse moyenne sur celle-ci. Compte tenu de la précision affichée, la formule déduite du développement en série de e^2 , et les formules de Ramanujan conduisent à la même valeur de $P/2\pi$.

Planète	a ua	e	T j	P/2π ua	P ua	V km/s
Mercure	0,387 098	0,205 632	88	0,382 973	2,406 290	47,3453
Vénus	0,723 330	0,006 773	224,7	0,723 322	4,544 764	35,0203
Terre	1,000 001	0,016 710	365,2564	0,999 931	6,282 753	29,7827
Mars	1,523 679	0,093 403	687	1,520 350	9,552 643	24,0757
Jupiter	5,202 603	0,048 503	4 333	5,199 542	32,669 685	13,0547
Saturne	9,554 909	0,055 559	10 760	9,547 531	59,988 908	9,6532
Uranus	19,218 446	0,046 382	30 689	19,208 106	120,688 088	6,8092
Neptune	30,110 387	0,009 456	60 182	30,109 714	189,184 912	5,4429

On déduit que la Terre parcourt les $939,886\,465 \times 10^6$ km de son orbite à la vitesse moyenne de 29,7827 km/s (à comparer à $V_b = 29,7847$ km/s : voir exercice E3-2).

On vérifiera que, vu les faibles excentricités des planètes, on peut avec une très bonne approximation considérer que $P \approx \pi(a+b)$; ainsi pour Mercure :

$$\frac{P}{2\pi} \approx \frac{a+b}{2} = 0,382962$$

- Par rapport aux planètes, les comètes ont des excentricités élevées. Il faut donc s'attendre d'une part à ce que la convergence des séries permettant d'atteindre le périmètre soit plus lente et d'autre part à ce que les formules de Ramanujan soient moins précises.

Pour la comète de Halley, les données sont :

$$a = 17,941\,990 \text{ ua} \quad e = 0,967\,277\,8 \quad T = 27\,759 \text{ j}$$

Le tableau ci-après donne une idée de la convergence de la série exponentielle, et de la précision des deux formules de Ramanujan :

série en e^{2n} (nombre de termes)	$P/2\pi$ ua	P ua	V km/s
1	17,942	112,733	7,032
2	13,745	86,364	5,387
-----	-----	-----	-----
6	12,489	78,468	4,894
7	12,433	78,118	4,873
8	12,395	77,879	4,858
9	12,368	77,709	4,847
10	12,348	77,584	4,839
11	12,333	77,489	4,833
12	12,321	77,416	4,829
-----	-----	-----	-----
$\rightarrow \infty$	12,265	77,064	4,807
Ramanujan			
1 ^{re} formule	12,266	77,073	4,807
2 ^e formule	12,268	77,081	4,808

Finalement, même pour l'ellipse « plate », la première formule donne de très bons résultats.

2.2 Surface de l'orbite

■ Aire d'un secteur

L'élément de surface en coordonnées polaires est :

$$dS = \rho d\rho d\theta$$

Ainsi, l'aire d'un domaine D a pour expression :

$$S = \iint_D \rho d\rho d\theta$$

Le rayon vecteur ρ est une fonction de θ ; considérant le secteur AOB de la figure 8.2, sa surface a pour expression :

$$S = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \rho^2(\theta) d\theta$$

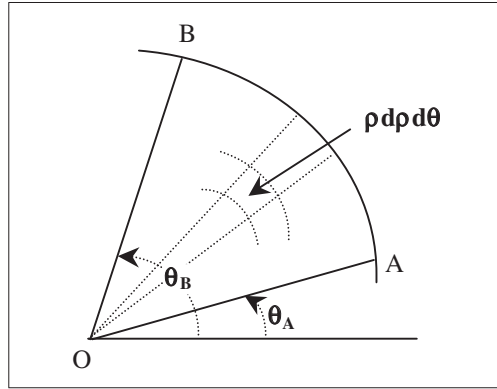


Figure 8.2 Aire d'un secteur en coordonnées polaires.

■ Application à l'ellipse

L'aire d'un secteur d'ellipse d'origine le foyer F et délimité par les rayons $\rho(\theta_0)$ et $\rho(\theta_1)$ a donc pour expression :

$$S = \frac{p^2}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad e < 1$$

Notons $F(\theta)$ l'intégrale indéfinie ; sans développer les calculs, on obtient :

$$F(\theta) = \int \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{e \sin \theta}{(e^2 - 1)(1 + e \cos \theta)} + \frac{1}{1 - e^2} \int \frac{d\theta}{1 + e \cos \theta}$$

Or :

$$\int \frac{d\theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{Arctg} \frac{(1 - e) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

On déduit :

$$F(\theta) = \frac{-e \sin \theta}{(1 - e^2)(1 + e \cos \theta)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

ou encore,

$$F(\theta) = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \left[\frac{-e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} + 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right]$$

On calcule : $F(0) = 0, \quad F(\pi) = \frac{\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}$

L'aire du secteur d'ellipse s'écrit :

$$S = \frac{p^2}{2} [F(\theta_1) - F(\theta_0)]$$

Pour $\theta_0 = 0$, on notera simplement :

$$S(\theta) = \frac{p^2}{2} F(\theta)$$

On vérifie que la surface de l'ellipse est $S = 2S(\pi) = p^2 F(\pi)$

$$= \pi \frac{p}{1-e^2} \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \pi ab$$

On retiendra finalement :

$$S(\theta) = \frac{ab}{2} \left[\frac{-e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} + 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right]$$



Pour $\theta > \pi$, on notera qu'il convient d'ajouter 2π à la valeur entre crochets.

■ Angle médian

La figure 8.3 visualise celui-ci.

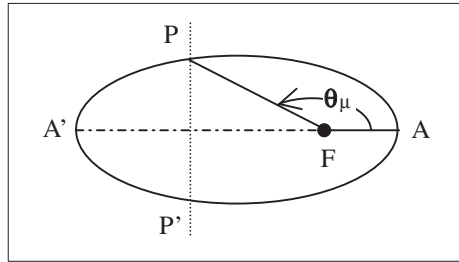


Figure 8.3 Angle médian.

L'**angle médian** est l'angle θ_μ tel que l'astre passe autant de temps d'un côté de l'axe P'P que de l'autre.

Compte tenu de la loi des aires, il s'en suit que :

$$\text{Aire (AFP)} = \text{Aire (A'FP)}$$

D'où :

$$F(\theta_\mu) - F(0) = F(\pi) - F(\theta_\mu) \rightarrow 2 F(\theta_\mu) = F(\pi)$$

L'angle médian satisfait donc la relation :

$$\frac{-e\sqrt{1-e^2} \sin \theta_\mu}{1+e \cos \theta_\mu} + 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta_\mu}{2} = \frac{\pi}{2}$$

On note que : $e \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_\mu \rightarrow \pi/2$

$$e \rightarrow 1 \Rightarrow \theta_\mu \rightarrow \pi$$

La relation peut s'exprimer plus simplement en fonction de l'anomalie excentrique ϕ_μ correspondant à θ_μ ; en effet, on a établi au chapitre 5 que :

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

Il vient donc :

$$\varphi_{\mu} - e \sin \varphi_{\mu} = \frac{\pi}{2}$$

Pour cet angle φ_{μ} on doit vérifier que le temps de parcours $t_{AP} = \frac{T}{4}$; c'est bien ce que fournit l'équation de Kepler.

On donne le tableau de l'angle médian θ_{μ} pour les planètes jusqu'à Neptune :

Planète	angle médian θ_{μ}	Planète	angle médian θ_{μ}
Mercure	112°,936	Jupiter	95°,549
Vénus	90°,776	Saturne	96°,354
Terre	91°,914	Uranus	95°,307
Mars	100°,642	Neptune	91°,084

Enfin, l'angle θ_k tel que l'Astre est situé k pour cent du temps à droite de P'P (côté périastre) satisfait à :

$$\frac{-e\sqrt{1 - e^2} \sin \theta_k}{1 + e \cos \theta_k} + 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = k\pi$$

Considérant la comète de Halley, pour

$k = 50 \%$	$\theta_{\mu} = 173^{\circ},3508$
$k = 1 \%$	$\theta_1 = 122^{\circ},9780$
$k = 0,1 \%$	$\theta_{01} = 39^{\circ},3460$

C'est dire le peu de temps que la comète reste auprès du Soleil !

exercices

E8-1 Caractérisation du mouvement elliptique par rayons et vitesse

Les données du mouvement sont les rayons ρ_0 au péricentre et ρ_π à l'apocentre, ainsi que la vitesse V_0 au péricentre.

Calculer :

1. l'excentricité ;
2. le demi-grand axe, le demi-petit axe, la demi-distance focale ;
3. le paramètre, la distance foyer-directrice, la directrice ;
4. la vitesse à l'apocentre et la vitesse en fonction de l'angle polaire ;
5. la période, l'énergie massique ;
6. les constantes de l'accélération et des aires.

solutions

1. Excentricité e

De $\frac{\rho_\pi}{\rho_0} = \frac{1+e}{1-e}$ on tire $\rightarrow e = \frac{\rho_\pi - \rho_0}{\rho_\pi + \rho_0}$

2. Demi-grand axe a , demi-petit axe b , demi-distance focale c

(Voir chapitre 2, paragraphe 1.2)

$$a = \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{2} \quad b = \sqrt{\rho_0 \rho_\pi} \quad c = \frac{\rho_\pi - \rho_0}{2}$$

3. Paramètre p , distance foyer-directrice k , directrice d

(Voir chapitre 2, paragraphe 1.2)

$$p = b^2/a, \quad k = b^2/c, \quad d = a^2/c$$

$$p = 2 \frac{\rho_0 \rho_\pi}{\rho_0 + \rho_\pi} \quad k = 2 \frac{\rho_0 \rho_\pi}{\rho_\pi - \rho_0} \quad d = \frac{1}{2} \frac{(\rho_0 + \rho_\pi)^2}{\rho_\pi - \rho_0}$$

4. Vitesses, V_π à l'apocentre, V en fonction de l'angle θ

• $\rho_\pi V_\pi = \rho_0 V_0$ (chapitre 3, paragraphe 3.1) $\rightarrow V_\pi = \frac{\rho_0}{\rho_\pi} V_0$

• $V = \sqrt{V_0 V_\pi} \frac{\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}{\sqrt{1-e^2}}$

Or :

$$V_0 V_\pi = \frac{\rho_0}{\rho_\pi} V_0^2 ; \quad 1+e^2 = 2 \frac{\rho_\pi^2 + \rho_0^2}{(\rho_\pi + \rho_0)^2} ; \quad 1-e^2 = 4 \frac{\rho_\pi \rho_0}{(\rho_\pi + \rho_0)^2}$$

$$\text{d'où} \quad \rightarrow \quad V = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho_0^2 / \rho_\pi^2 + (1 - \rho_0^2 / \rho_\pi^2) \cos \theta}$$

5. Période T, énergie massique E/m

(Voir chapitre 8, paragraphe 1)

$$\bullet \quad T = \pi \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{\sqrt{V_0 V_\pi}} \quad \rightarrow \quad T = \pi \frac{\rho_0 + \rho_\pi}{V_0} \sqrt{\frac{\rho_\pi}{\rho_0}}$$

$$\bullet \quad E = -\frac{1}{2} m V_0 V_\pi \quad \rightarrow \quad \frac{E}{m} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_\pi} V_0^2$$

6. Constantes μ de l'accélération et C des aires

$$\bullet \quad \text{De } V_0 V_\pi = \frac{\mu}{a} \text{ on déduit :} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2} V_0^2 (\rho_0 + \rho_\pi) \frac{\rho_0}{\rho_\pi}$$

$$\bullet \quad C = 2\pi \frac{ab}{T}$$

Compte tenu des expressions de a, b, et T obtenues ci-dessus, on a :

$$\rightarrow \quad C = \rho_0 V_0$$

➤ Remarque

À partir de l'équation polaire, on montre facilement que :

$$\frac{1}{\rho(\theta)} + \frac{1}{\rho(\theta + \pi)} = \frac{2}{p}$$

$$\text{et que} \quad \frac{1}{\rho^2(\theta)} + \frac{1}{\rho^2(\theta + \pi)} = \frac{2}{p^2} (1 + e^2 \cos^2 \theta)$$

ce qui pour $\theta = 0$ conduit à :

$$\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_\pi} = \frac{2}{p} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_\pi^2} = 2 \frac{1 + e^2}{p^2}$$

d'où on en déduit p, puis e.

E8-2 Éléments orbitaux en fonction de la période et de la vitesse au péricentre et à l'apocentre

Les données du mouvement sont la période T et les vitesses V_0 au péricentre et V_π à l'apocentre.

Calculer :

1. l'excentricité ;
2. le demi-grand axe, le demi-petit axe, la demi-distance focale ;
3. le paramètre, la distance foyer-directrice, la directrice ;

4. les rayons au péricentre et à l'apocentre ainsi que la vitesse en fonction de l'angle polaire ;
5. la première constante dynamique C , l'énergie massique, et la constante de l'accélération μ .

solutions

Préliminaires

L'aire balayée par le rayon polaire durant une période est égale à la surface de l'ellipse, la loi des aires permet d'écrire :

$$\pi ab = \frac{1}{2}CT$$

C est la première constante dynamique, elle satisfait aux égalités :

$$C = \frac{2\pi}{T}ab = \rho V \sin \alpha = \rho_0 V_0 = \rho_\pi V_\pi$$

avec :

$$\rho_0 = \frac{p}{1+e}, \quad \rho_\pi = \frac{p}{1-e}$$

1. Excentricité e

$$\text{De } \frac{V_0}{V_\pi} = \frac{\rho_\pi}{\rho_0} = \frac{1+e}{1-e}$$

On tire :

$$e = \frac{V_0 - V_\pi}{V_0 + V_\pi} \quad 1 - e = \frac{2V_\pi}{V_0 + V_\pi} \quad 1 + e = \frac{2V_0}{V_0 + V_\pi}$$

2. Demi-grand axe a , demi-petit axe b , demi-distance focale c

$$\text{De : } p = a(1-e^2), \quad b = a\sqrt{1-e^2} \quad (\text{voir chapitre 2, paragraphe 1.2})$$

On tire :

$$\rho_0 V_0 = a(1-e)V_0 = \frac{2\pi}{T}a^2\sqrt{1-e^2}$$

d'où

$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} V_0, \quad b = \frac{T}{2\pi} (1-e)V_0, \quad c = ae$$

Il vient finalement :

$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{V_0 V_\pi}$$

$$b = \frac{T}{\pi} \frac{V_0 V_\pi}{V_0 + V_\pi}$$

$$c = \frac{T}{2\pi} \frac{V_0 - V_\pi}{V_0 + V_\pi} \sqrt{V_0 V_\pi}$$

3. Paramètre p, distance foyer-directrice k, directrice d

(Voir chapitre 2, paragraphe 1.2)

$$p = b^2/a, \quad k = b^2/c, \quad d = a^2/c$$

d'où :

$$p = 2 \frac{T}{\pi} \frac{(V_0 V_\pi)^{3/2}}{(V_0 + V_\pi)^2}$$

$$k = 2 \frac{T}{\pi} \frac{(V_0 V_\pi)^{3/2}}{V_0^2 - V_\pi^2}$$

$$d = \frac{T}{2\pi} \frac{V_0 + V_\pi}{V_0 - V_\pi} \sqrt{V_0 V_\pi}$$

4. Rayons ρ_0 et ρ_π , Vitesse en fonction de l'angle θ • Partant de ρ_0 , on a les égalités :

$$\rho_0 = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) = \frac{T}{2\pi} \sqrt{V_0 V_\pi} \frac{2V_\pi}{V_0 + V_\pi}$$

D'autre part :

$$\rho_\pi = \rho_0 \frac{V_0}{V_\pi}$$

d'où les expressions :

$$\rho_0 = \frac{T}{\pi} \frac{\sqrt{V_0 V_\pi}}{V_0 + V_\pi} V_\pi$$

$$\rho_\pi = \frac{T}{\pi} \frac{\sqrt{V_0 V_\pi}}{V_0 + V_\pi} V_0$$

• On a vu au chapitre 3 que : $V = \sqrt{V_0 V_\pi} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}$, et on connaît

l'expression de l'excentricité en fonction des vitesses V_0 et V_π ; toutefois,

notant que $\frac{\rho_0}{\rho_\pi} = \frac{V_\pi}{V_0}$, on reprendra directement la formule de la vitesse

établie à l'exercice précédent :

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + V_\pi^2 / V_0^2 + (1 - V_\pi^2 / V_0^2) \cos \theta}$$

soit encore :
$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{V_0^2 + V_\pi^2 + (V_0^2 - V_\pi^2) \cos \theta}$$

5. Constante C, énergie massique E/m et constante μ

• Partant de $C = \rho_0 V_0$, on a immédiatement :
$$C = \frac{T}{\pi} \frac{(V_0 V_\pi)^{3/2}}{V_0 + V_\pi}$$

• On a vu au chapitre 8 que :
$$\frac{E}{m} = -\frac{1}{2} V_0 V_\pi$$

• $\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$ (3^e loi de Kepler) $\rightarrow$
$$\mu = \frac{T}{2\pi} (V_0 V_\pi)^{3/2}$$

E8-3 Trajectoire déduite du rayon et du vecteur vitesse en un point

On se propose de caractériser la trajectoire d'une comète uniquement par la connaissance, en un point donné P de celle-ci, du rayon polaire ρ et de la vitesse $\vec{V}$, dont l'angle avec le rayon vecteur est α .

La figure 8.4. ci-dessous précise les grandeurs mesurées en P :

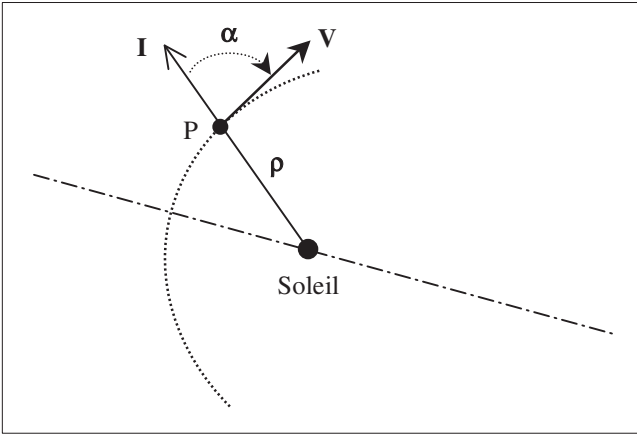


Figure 8.4

La constante héliocentrique de la gravitation μ_s est également une donnée du problème.

1. Écrire l'expression de l'énergie mécanique massique de la comète et la calculer. En déduire la condition pour que la trajectoire soit une ellipse.
2. Déterminer la constante des aires, le paramètre et l'excentricité de la trajectoire.
3. Écrire l'équation $\rho(\theta)$ de la trajectoire, sachant que ρ est minimum pour $\theta = 0$; en déduire l'angle entre l'axe des apsides et le rayon vecteur.
4. Exprimer les rayons au périhélie, à l'aphélie, ainsi que leur produit ; faire de même pour les vitesses et en déduire l'énergie massique.
5. Donner deux expressions de la période de rotation, que l'on calculera en années.

Les données pour les applications numériques sont :

$$\rho = 92,070\,519\,8 \times 10^6 \text{ km} \quad V = 53,229\,682 \text{ km.s}^{-1} \quad \alpha = 77,711\,277$$

$$\mu_s = 132\,712,44 \times 10^6 \text{ km}^3.\text{s}^{-2}$$

solutions

1. Énergie massique E/m

L'énergie mécanique de la comète de masse m est la somme des énergies cinétique et potentielle, d'où :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu_s}{\rho} \quad \rightarrow \quad E/m = -24,722\,115 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$$

La condition pour que la trajectoire soit elliptique(*) est que l'énergie soit négative :

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu_s}{\rho} < 0, \text{ soit } \frac{1}{2}\rho V^2 < \mu_s ; \text{ nous sommes donc dans ce cas.}$$

On pose $K = \frac{\rho V^2}{\mu_s}$ et on en déduit que $0 < K < 2$;

Le calcul donne $K = 1,965\,698$.

2. Constante des aires C, paramètre p et excentricité e

On sait que $p = \frac{C^2}{\mu_s}$, C étant la première constante dynamique (constante des aires).

$$C = \rho V \sin \alpha \quad \rightarrow \quad C = 4788,593 \times 10^6 \text{ km}^2.\text{s}^{-1}$$

$$p = \frac{\rho^2 V^2 \sin^2 \alpha}{\mu_s} \quad \rightarrow \quad p = 172,784\,270 \times 10^6 \text{ km}$$

On a vu au chapitre 7 que l'énergie s'exprimait également en fonction de l'excentricité d'où les égalités :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\mu_s \frac{e^2 - 1}{p} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu_s}{\rho} ; \text{ on en déduit :}$$

$$e^2 = \frac{pV^2}{\mu_s} - 2\frac{p}{\rho} + 1$$

Introduisant le paramètre K , il vient :

$$e = \sqrt{K(K - 2)\sin^2 \alpha + 1} \quad \rightarrow \quad e = 0,967\,278$$

On notera qu'il faut satisfaire à $\sin^2 \alpha \leq \frac{1}{K(2 - K)}$, ce qui est toujours vérifié dans l'intervalle $\{0, 2\}$.

(*) la trajectoire ne peut être circulaire dans la mesure où α est différent de $\pi/2$.

3. Trajectoire $\rho(\theta)$ et angle θ du rayon avec l'axe des apsides

La trajectoire étant une ellipse, l'équation polaire s'écrit : $\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \beta)}$

Le rayon est minimum pour $\theta - \beta = 0$, ce qui dans le cas présent implique que β est nul.

Partant de l'équation de la trajectoire, on déduit :

$$\cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right) = 0,906\,308 \rightarrow \theta = 0,436\,332 \text{ rad}$$

$$\text{soit } \theta = 25^\circ$$

4. Rayons ρ_p , ρ_A et produit ; vitesse V_p , V_A et produit

$$\rho_p = \frac{p}{1 + e} \rightarrow \rho_p = 87,829\,116 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\text{soit } \rho_p = 0,587\,101 \text{ ua}$$

$$\rho_A = \frac{p}{1 - e} \rightarrow \rho_A = 5280,337\,817 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\text{soit } \rho_A = 35,296\,893 \text{ ua}$$

$$\rho_p \rho_A = -p \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{-p}{\frac{V^2}{\mu_s} - \frac{2}{\rho}} \rightarrow \rho_p \rho_A = \frac{-p^2 V^2 \sin^2 \alpha}{V^2 - 2 \frac{\mu_s}{\rho}}$$

$$V_p = \frac{C}{\rho_p} = \frac{\rho V \sin \alpha}{\rho_p} \rightarrow V_p = 54,521\,702 \text{ km.s}^{-1}$$

$$\text{on retiendra } V_p = 54,522 \text{ km.s}^{-1}$$

$$V_A = \frac{C}{\rho_A} = \frac{\rho V \sin \alpha}{\rho_A} \rightarrow V_A = 0,906\,872 \text{ km.s}^{-1}$$

$$\text{on retiendra } V_A = 0,907 \text{ km.s}^{-1}$$

$$V_p V_A = \frac{\rho^2 V^2 \sin^2 \alpha}{\rho_p \rho_A} = -(V^2 - 2 \frac{\mu_s}{\rho}) \rightarrow V_p V_A = 2 \frac{|E|}{m}$$

5. Période de rotation T

$$T = 2\pi \mu_s \left(\frac{m}{2|E|} \right)^{3/2} = 2\pi \mu_s \frac{1}{(V_p V_A)^{3/2}} \rightarrow T = 27\,759 \text{ j (de } 86\,400 \text{ s)}$$

$$\text{Une année} = 365,25 \text{ j} \quad \text{d'où : } \rightarrow T = 76 \text{ années}$$

Il s'agit en fait de la comète de Halley, qui a déjà fait l'objet de l'exercice E5-1.

E8-4 Trajectoire de la sonde *Giotto* vers la comète de Halley : le problème de Lambert

La sonde *Giotto* a été précédée de deux sondes japonaises et deux sondes soviétiques (Véga 1 et 2) qui ont défriché le terrain quelques jours auparavant afin de permettre à la sonde européenne de s'approcher précisément du cœur de la comète de Halley. Elle passa ainsi à 600 km de la comète le 14 mars 1986, à une vitesse relative de 68,4 km/s.

La trajectoire réelle de la sonde était située dans un plan faiblement incliné par rapport à l'écliptique. Nous considérerons dans cet exercice que la trajectoire est située dans le plan écliptique.

On rappelle (voir exercice E5-1) que la comète de Halley rencontre l'écliptique au nœud descendant Nd le 10 mars 1986 à 8 h 50 min 55 s ; à cet instant, le rayon est ρ_H .

La sonde *Giotto* est lancée de la Terre et placée sur sa trajectoire héliocentrique à une date que l'on fait correspondre à l'apocentre terrestre soit le 4 juillet 1985 à 17 h 48 min 53 s ; le rayon est alors ρ_T .

Compte tenu de ces éléments, l'angle des deux rayons vecteurs est $\Delta\theta = 44^\circ,544\,737$.

On se propose de déterminer la trajectoire elliptique de la sonde afin qu'elle soit bien au rendez-vous avec la comète le 10 mars 1986 : connaissant les rayons vecteurs à deux instants donnés, il s'agit en fait de résoudre le **problème de Lambert**.

Nous prendrons comme paramètre l'anomalie vraie θ_H du rayon vecteur ρ_H ; on en déduit alors l'anomalie θ_T du rayon ρ_T .

1.

a) Écrire l'équation polaire aux points H et T, et en déduire les expressions littérales de l'excentricité e et du paramètre p en fonction de θ_H .

b) Exprimer la période T_G de la trajectoire de la sonde en fonction de p et e .

2.

a) Quel est le temps Δt mis par la sonde pour atteindre la comète ?

b) Par application de l'équation de Kepler, exprimer le temps $t_T - t_H$ que mettrait la sonde pour parcourir la portion de trajectoire allant de H à T ; préciser la relation existant entre les durées Δt et $t_T - t_H$.

c) Écrire le sinus des anomalies excentriques φ en fonction des anomalies vraies θ . Préciser comment obtenir la bonne détermination de φ_H et φ_T .

3.

a) Préciser comment opérer à l'aide d'un tableur afin d'atteindre la bonne valeur de θ_H .

b) Pour cette valeur, qu'obtient-on pour l'excentricité, le paramètre, la période ?

– Préciser les valeurs de θ_H , θ_T , θ_B , et des anomalies excentriques φ_H et φ_T .

– Exprimer le rayon et la vitesse au périhélie et à l'aphélie.

4.

a) Calculer la vitesse de la sonde Giotto, et l'angle α avec le rayon vecteur au voisinage H de la comète (nœud descendant) et T de la Terre.

b) Calculer en H les vitesses radiale V_{ρ_H} et orthoradiale V_{θ_H} de la sonde.

Pour la comète, la vitesse radiale $V_{\rho_{Nd}}$ et la vitesse orthoradiale $V_{\theta_{Nd}}$ sont fournies à l'exercice E5-1.

c) On définit le référentiel $\{H; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$ comme suit :

$\vec{I}$ est porté par le rayon vecteur $\overrightarrow{SH}$ et de même sens ; $\vec{K}$ est normal au plan écliptique et orienté vers le Nord. Le trièdre est direct.

– Exprimer dans ce référentiel les coordonnées X_H, Y_H, Z_H du vecteur vitesse $\vec{V}_H$ de la sonde.

– Exprimer de même les coordonnées X_{Nd}, Y_{Nd}, Z_{Nd} du vecteur vitesse $\vec{V}_{Nd}$ de la comète sachant que son plan orbital est incliné d'un angle i par rapport au plan écliptique.

d) Quelle est en H la vitesse relative $\vec{V}_R$ de la sonde par rapport à la comète ? On calculera ses coordonnées X_R, Y_R, Z_R ainsi que son module V_R .

Données :

Constante héliocentrique de la gravitation $\mu_s = 132\,712,44 \times 10^6 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

$$1 \text{ ua} = 149,597\,870\,61 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\text{Rayon } \rho_H = 0,849\,293 \text{ ua}$$

$$\text{Rayon } \rho_T = 1,016\,716 \text{ ua}$$

$$\text{Inclinaison } i = 162^\circ,239\,21$$

solutions

1. Éléments de la trajectoire elliptique

a) Expression de l'excentricité e et du paramètre p

$$\text{L'équation polaire en H est : } \rho_H = \frac{p}{1 + e \cos \theta_H}$$

$$\text{L'équation polaire en T est : } \rho_T = \frac{p}{1 + e \cos \theta_T} \quad \text{avec}$$

$$\theta_T = \theta_H + \Delta\theta \quad (1) \quad \text{où } \Delta\theta = 44^\circ,544\,737$$

On en déduit :

$$e = \frac{\rho_T - \rho_H}{\rho_H \cos \theta_H - \rho_T \cos \theta_T} \quad (2)$$

$$p = \rho_H \rho_T \frac{\cos \theta_H - \cos \theta_T}{\rho_H \cos \theta_H - \rho_T \cos \theta_T} \quad (3)$$

b) Expression de la période T_G

Partant de $T_G^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\mu_s}$ avec $a = \frac{p}{1 - e^2}$ on écrit :

$$T_G = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_s}} \left(\frac{p}{1 - e^2} \right)^{3/2} \quad (4)$$

2. Équation de Kepler et durée des trajets**a) Durée Δt du trajet de l'aphélie terrestre à la comète**

La date en T est le 4 juillet 1985 à 17 h 48 min 53 s soit 0,742 275 jour.

La date en H est le 10 mars 1986 à 8 h 50 min 55 s soit 0,368 692 jour.

On retiendra comme durée du trajet : $\Delta t = 248,626 \text{ j}$

b) Durée $t_T - t_H$ du trajet de la comète à l'aphélie terrestre

L'équation de Kepler donne la durée t du trajet à partir du péricentre :

$$t = (\varphi - e \sin \varphi) \frac{T}{2\pi}, \quad \varphi \text{ étant l'anomalie excentrique.}$$

La sonde *Giotto* a une trajectoire elliptique de période T_G , et pour aller de H à T elle mettrait le temps $t_T - t_H$ tel que :

$$t_T - t_H = [(\varphi_T - e \sin \varphi_T) - (\varphi_H - e \sin \varphi_H)] \frac{T_G}{2\pi} \quad (5)$$

La durée Δt du trajet est liée au temps $t_T - t_H$ par la relation :

$$\Delta t = T_G - (t_T - t_H) \quad (6)$$

Afin d'exprimer la relation (5) uniquement en fonction de l'anomalie vraie θ_H , il nous reste à donner les expressions convenables de l'anomalie excentrique.

c) Anomalies excentriques φ_H et φ_T

- Anomalies excentriques et anomalies vraies en H et T, sont liées par les relations :

$$\sin \varphi_H = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta_H}{1 + e \cos \theta_H} \quad (7)$$

$$\sin \varphi_T = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta_T}{1 + e \cos \theta_T} \quad (7')$$

- Comme vu à l'exercice E5-1, la détermination de la fonction trigonométrique inverse va dépendre du couple :

$$\theta_B = \text{Arc cos}(-e) \quad \text{et} \quad \theta_{B'} = 2\pi - \theta_B \quad (8)$$

elle devra satisfaire à l'expression logique suivante (où θ désigne θ_H ou θ_T) :

$$\text{SI}(\theta < \theta_B; \text{ASIN}\varphi; \text{SI}(\theta < \theta_{B'}; \pi - \text{ASIN}\varphi; 2\pi + \text{ASIN}\varphi)) \quad (9) \text{ et } (9')$$

3. Résolution à l'aide d'un tableur

a) Obtention de l'anomalie vraie θ_H

On pourra faire apparaître au minimum les colonnes suivantes :

colonne	Objet	Référence formule
A	Anomalie vraie θ_H	valeur initiale et pas
B	Anomalie vraie θ_T	(1)
C	Excentricité e	(2)
D	Paramètre p	(3)
E	Période T	(4)
F	Sinus de l'anomalie excentrique ϕ_H	(7)
G	Anomalie excentrique ϕ_H	(9) avec (8)
H	Sinus de l'anomalie excentrique ϕ_T	(7')
I	Anomalie excentrique ϕ_T	(9') avec (8)
J	Équation de Kepler donnant $t_T - t_H$	(5)
K	Durée du trajet Δt	(6)

La valeur de θ_H à retenir est celle qui conduira à la valeur de Δt calculée initialement.

b) Résultats

- excentricité période $e = 0,247\,224$ paramètre durée $p = 0,809\,960\text{ ua}$
 $T_G = 292,670\text{ j}$ $t_T - t_H = 44,044\text{ j}$
- anomalie vraie $\theta_H = 100^\circ,7970$ anomalie vraie $\theta_T = 145^\circ,3417$
 $\theta_B = 104^\circ,3133$
- anom. excentrique $\phi_H = 86^\circ,3993$ anom. excentrique $\phi_T = 136^\circ,2362$
- $\rho_P = \frac{p}{1+e}$ $\rho_P = 0,649\,410\text{ ua}$ $V_P = \sqrt{\frac{\mu_s}{p}}(1+e)$ $V_P = 41,277\text{ km/s}$
 $\rho_A = \frac{p}{1+e}$ $\rho_A = 1,075\,965\text{ ua}$ $V_A = \sqrt{\frac{\mu_s}{p}}(1-e)$ $V_A = 24,913\text{ km/s}$

4. Vitesses propre et relative de la sonde au voisinage de la comète et de la Terre

a) Vitesses V_H et V_T , angles α_H et α_T

- Pour déterminer les vitesses on utilise la relation :

$$V = \sqrt{\frac{\mu_s}{p}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}$$

D'où :

$$V_H = 32,569\text{ km/s}$$

$$V_T = 26,772\text{ km/s}$$

- Pour déterminer l'angle α du vecteur vitesse avec le rayon vecteur, on utilise la relation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + e \cos \theta}{e \sin \theta} \quad \text{qui permet d'atteindre } \alpha \text{ selon le critère :}$$

$$\text{SI}(\theta \leq 180^\circ ; \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \alpha ; 180^\circ + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \alpha)$$

Ainsi,

$$\alpha_H = 75^\circ,714$$

$$\alpha_T = 79^\circ,991$$

b) Vitesses radiales et orthoradiales en H

- Pour la sonde :

$$V_{pH} = V_H \cos \alpha_H = 8,037 \text{ km/s}$$

$$V_{\theta H} = V_H \sin \alpha_H = 31,562 \text{ km/s}$$

- Pour la comète, on rappelle que :

$$V_{Nd} = 45,163 \text{ km/s}$$

$$\alpha_{Nd} = 56^\circ,568$$

et en conséquence :

$$V_{pNd} = V_{Nd} \cos \alpha_{Nd} = 24,882 \text{ km/s}$$

$$V_{\theta Nd} = V_{Nd} \sin \alpha_{Nd} = 37,690 \text{ km/s}$$

c) Coordonnées cartésiennes des vitesses $\vec{V}_H$ de la sonde

et $\vec{V}_{Nd}$ de la comète

$$\begin{array}{l} \vec{V}_H \text{ sonde} \\ \left| \begin{array}{l} X_H = V_H \cos \alpha_H = 8,037 \text{ km/s} \\ Y_H = V_H \sin \alpha_H = 31,562 \text{ km/s} \\ Z_H = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{V}_{Nd} \text{ comète} \\ \left| \begin{array}{l} X_{Nd} = V_{Nd} \cos \alpha_{Nd} = 24,882 \text{ km/s} \\ Y_{Nd} = V_{Nd} \sin \alpha_{Nd} \cos i = -35,894 \text{ km/s} \\ Z_{Nd} = -V_{Nd} \sin \alpha_{Nd} \sin i = -11,497 \text{ km/s} \end{array} \right. \end{array}$$

d) Vitesse relative $\vec{V}_R$ de la sonde

La vitesse relative $\vec{V}_R$ de la sonde *Giotto* par rapport à la comète de Halley est :

$$\vec{V}_R = \vec{V}_H - \vec{V}_{Nd}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{array}{l} \vec{V}_R \text{ sonde / comète} \\ \left| \begin{array}{l} X_R = X_H - X_{Nd} = -16,845 \text{ km/s} \\ Y_R = Y_H - Y_{Nd} = 67,456 \text{ km/s} \\ Z_R = Z_H - Z_{Nd} = 11,497 \text{ km/s} \end{array} \right. \end{array}$$

$$|\vec{V}_R| = V_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2} \rightarrow V_R = 70,471 \text{ km/s}$$

➤ Remarques

1– La vitesse relative obtenue est sensiblement supérieure à celle correspondant à la mission réelle où le plan de la trajectoire était légèrement incliné sous l'écliptique, conduisant à un rendez-vous le 14 mars 1986, c'est-à-dire 4 jours plus tard.

Soit $N\delta$ ce nouveau point ; se reportant à l'exercice E5-1 on en déduit qu'à partir du périhélie de la comète :

$$t_{N\delta} = 32,91 \text{ jours}$$

d'où

$$\varphi_{N\delta} = 11^{\circ},031\,954 \quad \theta_{N\delta} = 73^{\circ},650\,501 \quad \text{soit}$$

$$\theta_{N\delta} - \theta_{Nd} = 5^{\circ},497\,021$$

On déduit alors :

$$\rho_{N\delta} = 0,907\,809 \text{ ua}$$

$$V_{N\delta} = 43,646 \text{ km/s} \quad \text{avec} \quad \alpha_{N\delta} = 53^{\circ},888 \quad \rightarrow \quad V_{\rho N\delta} = 25,723 \text{ km/s}$$

$$\rightarrow V_{\theta N\delta} = 35,260 \text{ km/s}$$

Le problème peut être repris connaissant l'inclinaison de la trajectoire de *Giotto* et après avoir déterminé le nouvel angle $\Delta\theta$...

2– Anticipant sur les prochains chapitres, et en particulier sur le chapitre 11, nous avons représenté sur la figure 8.5 la trajectoire de la sonde *Giotto* en y faisant figurer quelques points remarquables et les vitesses en ceux-ci.

Voici quelques éléments du cheminement :

→ Détermination de la date du passage de notre planète à l'apogée en 1985.

Pour dégrossir, le 4 juillet à 0 h correspond à 5294,5 jours avant le 1^{er} janvier 2000 à 12 h TU.

En fait, on atteint le temps τ pour une anomalie moyenne M telle que :

$$M = -(360 \times 14 + 180) = -5220^{\circ}$$

On déduit ainsi le nombre de jours avant la référence J2000, soit 5293,757 725 264 jours !

D'où la date du : 4 juillet 1985 à 17 h 48 min 53 s.

→ À cette date, pour la Terre :

$$a = 1,000\,001\,018 \text{ ua} \quad e = 0,016\,714\,724$$

Le rayon à l'aphélie est : $\rho_A = 1,016\,716 \text{ ua}$

L'argument du périhélie $\omega_T = 102^{\circ},688\,147\,448 = 102^{\circ}\,41'\,17'',33$

→ Pour la comète Halley :

La longitude du nœud ascendant est $\Omega_H = 58^{\circ},143\,410$.

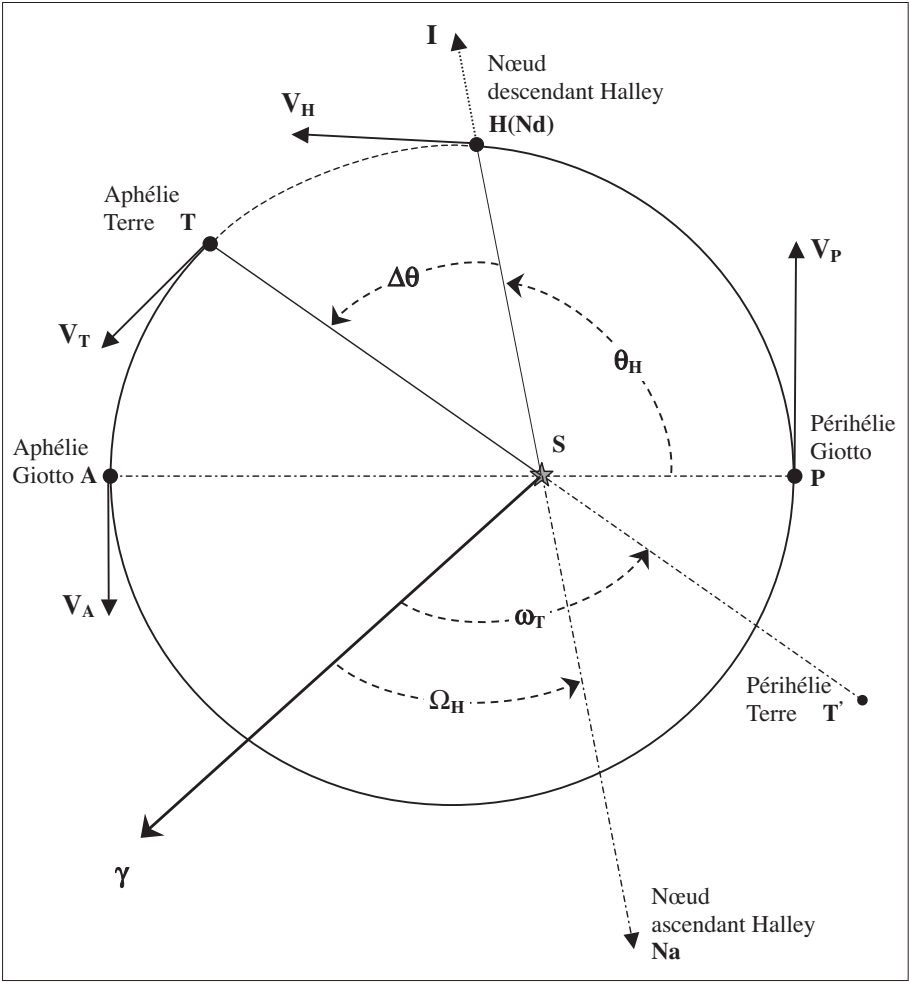


Figure 8.5 Trajectoire de la sonde Giotto vers la comète de Halley.

Repérage des astres par rapport à la Terre

Nous nous proposons maintenant, à partir de notre planète Terre, de situer un astre : autre planète du système solaire, satellite, étoile... Après avoir défini les coordonnées terrestres du point d'observation, nous préciserons le repère local dans lequel par exemple une monture alt-azimutale peut être positionnée sur un objet céleste donné. Un autre repère lié à la Terre sera ensuite défini par rapport à l'équateur et au méridien de Greenwich, l'angle horaire d'un astre y sera affecté de la rotation de notre planète que les montures équatoriales des instruments d'observation astronomique savent compenser. À partir du triangle de position, à l'aide des relations de Gauss, nous établirons les formules de passage entre coordonnées horaires et locales.

Un premier exercice nous fait calculer la plus courte distance entre deux points de coordonnées géographiques connues. Le deuxième exercice montre l'intérêt d'une base de lancement équatoriale : on bénéficie pleinement de la vitesse d'entraînement de la Terre lors d'un tir vers l'Est, et il n'est plus besoin de faire pivoter le plan de l'orbite de transfert d'un satellite géostationnaire. Nous complétons ainsi les exercices E7-1 et E7-2. Le troisième exercice concerne également les satellites géostationnaires ; il s'agit maintenant d'orienter une antenne parabolique dans la direction d'un satellite de télécommunication grâce à la connaissance de ses angles d'azimut et de site.

Nous quitterons enfin les satellites artificiels pour nous intéresser aux positions du Soleil à différents moments de la journée, en précisant l'heure de passage au méridien et les instants des crépuscules civil et nautique.

1 Coordonnées géographiques

Les coordonnées géographiques sont aussi dénommées **coordonnées terrestres**. La Terre est supposée sphérique de centre C. Son axe de rotation est l'axe des pôles coupant la planète « au dessus » au pôle Nord géographique (point P_N) et « au dessous » au pôle Sud géographique (point P_S). L'équateur est le grand cercle, **cercle équatorial**, intersection avec la Terre du plan perpendiculaire à l'axe de rotation et contenant son centre. Il délimite l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud.

1.1 Parallèles et latitude

Les plans parallèles à l'équateur découpent sur la sphère terrestre des petits cercles, les **parallèles**, qui matérialisent la **latitude L**.

Un demi-plan s'appuyant sur l'axe des pôles coupe le cercle équatorial et le parallèle sélectionné : l'angle L de sommet le centre de la Terre et dont les côtés passent par ces deux intersections mesure la latitude ; le symbole φ est aussi utilisé.

L'origine des latitudes est le cercle équatorial sur lequel par conséquent $L = 0^\circ$.

Dans l'hémisphère Nord, les latitudes croissent de 0° à $+90^\circ$ au pôle Nord.

Dans l'hémisphère Sud, les latitudes décroissent de 0° à -90° au pôle Sud.

Si les latitudes ne sont pas notées algébriquement, on précise alors N ou S selon que l'on se situe respectivement dans l'hémisphère Nord ou Sud.

1.2 Méridiens et longitude

Les plans contenant l'axe polaire découpent sur la sphère terrestre des grands cercles de même périmètre que le cercle équatorial. Chaque demi-grand cercle joignant pôles Nord et Sud est un **méridien**.

On choisit un **méridien origine**. La distance angulaire entre un méridien quelconque et ce méridien est la **longitude G** ; le symbole λ est aussi utilisé.

Depuis 1884 le méridien origine est celui qui passe par l'observatoire de Londres à Greenwich, dont la fondation remonte à 1675.

La longitude est généralement comptée de 0° à $+180^\circ$ vers l'Ouest et de 0° à -180° vers l'Est.

Lorsque la longitude n'est pas notée algébriquement, la grandeur est complétée de la lettre W pour Ouest et E pour Est.

1.3 Coordonnées d'un point géographique

Un point géographique, par exemple la position P d'un observateur terrestre, sera défini par le couple (L, G) ou (φ , λ). Sur la figure 9.1, l'échelle des latitudes est reportée sur le méridien origine, celle des longitudes sur l'équateur.

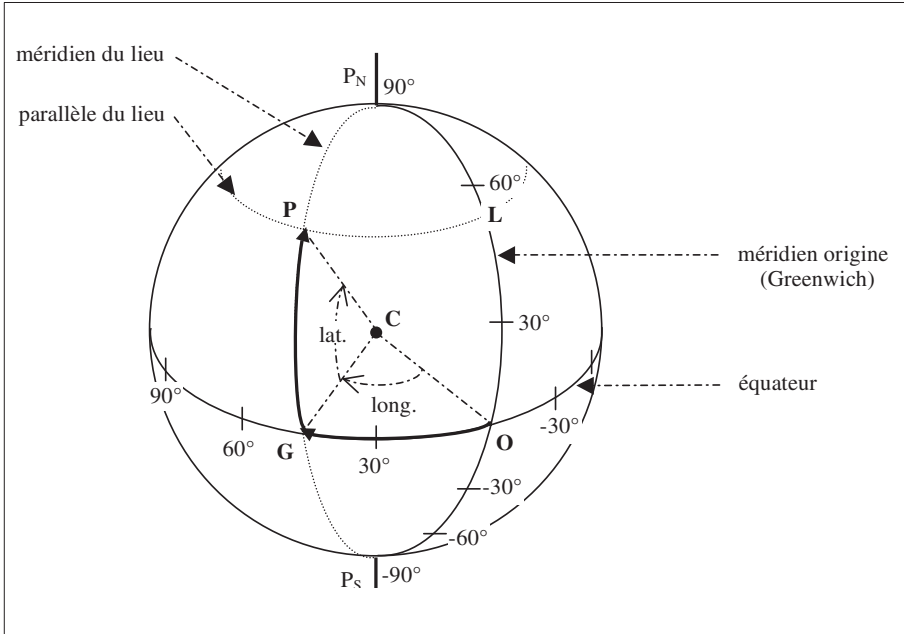


Figure 9.1 Localisation par parallèle et méridien.

Le canevas des méridiens et parallèles figure sur les cartes aéronautiques et géographiques :

- Sur la carte aéronautique OACI (Organisation de l'aviation civile internationale) France Nord-Ouest (941), éditée tous les ans par l'Institut géographique national (IGN), sont tracés les parallèles 47° N à 51° N, et les méridiens de 5° W à 3° E. Sur ce canevas, les graduations sont de minute en minute.

Par exemple, on peut vérifier sur cette carte que la balise radioélectrique de coordonnées géographiques

$$L = 48^{\circ} 09' 20'' \text{ N} ; \quad G = 002^{\circ} 15' 56'' \text{ E}$$

correspond bien au VOR de Pithiviers (VOR = VHF. *Omni-directionnal Range* ; c'est un radiophare omnidirectionnel).

- Sur la carte de navigation côtière 7033S du SHOM (Service hydrographique et océanographique de la marine), le canevas des parallèles et des méridiens est tracé toutes les cinq minutes d'angle ; les échelles figurent sur les côtés avec un pas de 1/10° de minute. Pour le phare du port de Mesquer au sud de l'embouchure de la Vilaine, on relève :

$$L = 47^{\circ} 25',35 \text{ N} \quad G = 002^{\circ} 27',98 \text{ W}$$

le « livre des feux et signaux de brume » du SHOM donne $L = 47^{\circ} 25',3 \text{ N}$; $G = 2^{\circ} 28',1 \text{ W}$.

➤ Remarques

1– Le périmètre de l'équateur étant de 40 075 km, on en déduit que :

- 1° correspond à 111,32 km à l'équateur,
- $1'$, soit $1/60^\circ$ de degré, correspond à 1 855,3 mètres.

Le **mille marin** ou mille nautique ou simplement mille, est une unité de distance correspondant à un arc de méridien de une minute d'angle. Sur la Terre, le méridien n'est pas rigoureusement un cercle ; on a choisi comme valeur de cette unité celle correspondant à la mesure à une latitude de 45° , soit 1 852 m. On retient donc :

$$1Nm = 1\,852\text{ m}$$

2– L'angle complémentaire de la latitude est la **colatitude** qui correspond à l'arc $P_N P$. Elle a donc pour valeur :

$$(CP_N, CP) = 90^\circ - L$$

2 Coordonnées locales

Les coordonnées locales sont aussi dénommées **coordonnées horizontales**. On se propose de préciser la position d'un astre dans un repère terrestre local.

2.1 Définition du repère

L'observateur terrestre est toujours au point P.

- Le plan tangent en P à la sphère terrestre est l'**horizon du lieu**, ou horizon local, ou encore horizon apparent. C étant le centre de la Terre, ce plan est perpendiculaire au rayon CP.
- La verticale du lieu, portée par le prolongement du rayon CP et orientée vers le ciel, indique le **Zénith** Z_p du point P. La direction inverse pointe vers le **Nadir**.
- On note $\vec{Z}_p$ la verticale locale et on considère dans le plan horizontal la direction du Nord (Nord géographique dit aussi Nord vrai).

2.2 Hauteur et azimut d'un astre

La position angulaire d'un astre dans le repère précisé ci-dessus est définie par deux angles.

- La **hauteur** h qui est l'angle, d'origine P, entre la direction de l'astre (droite PA) et sa projection orthogonale sur l'horizon du lieu. Elle est normalement comptée de 0° à 90° à partir de l'horizon. Cet angle est appelé **altitude** par les astronomes.
- L'**azimut** Z (azimut vrai), qui est l'angle entre la direction du Nord et la projection de l'astre.

- Les navigateurs le comptent de 0° à 360° de la direction du Nord vers l'Est, comme un relèvement. Il est donc orienté dans le sens rétrograde (sens des aiguilles d'une montre).
- Les astronomes notent souvent **a** l'azimut et le comptent à partir de la direction du Sud, en conservant le sens rétrograde ; ainsi,

$$Z = a + 180^\circ$$

2.3 Vertical de l'astre et plan méridien du lieu

Le plan contenant l'astre et la verticale locale est appelé le **vertical de l'astre**. De par sa définition, on en déduit :

- qu'il est perpendiculaire à l'horizon du lieu, et que la droite d'intersection est la projection de la direction de l'astre ;
- qu'il contient le centre de la Terre, et découpe sur celle-ci un grand cercle que l'on appelle cercle vertical de l'astre.

Le plan défini par la verticale locale et la direction du Nord contient le centre de la Terre et l'axe des pôles puisque la direction du Nord passe par cet axe ; son intersection avec notre planète détermine le **méridien du lieu**.

Vertical de l'astre et plan méridien du lieu sont perpendiculaires à l'horizon local, par conséquent l'angle Z est également l'angle entre ces deux plans.

La figure 9.2 visualise la position d'un astre A à partir de ses coordonnées locales.

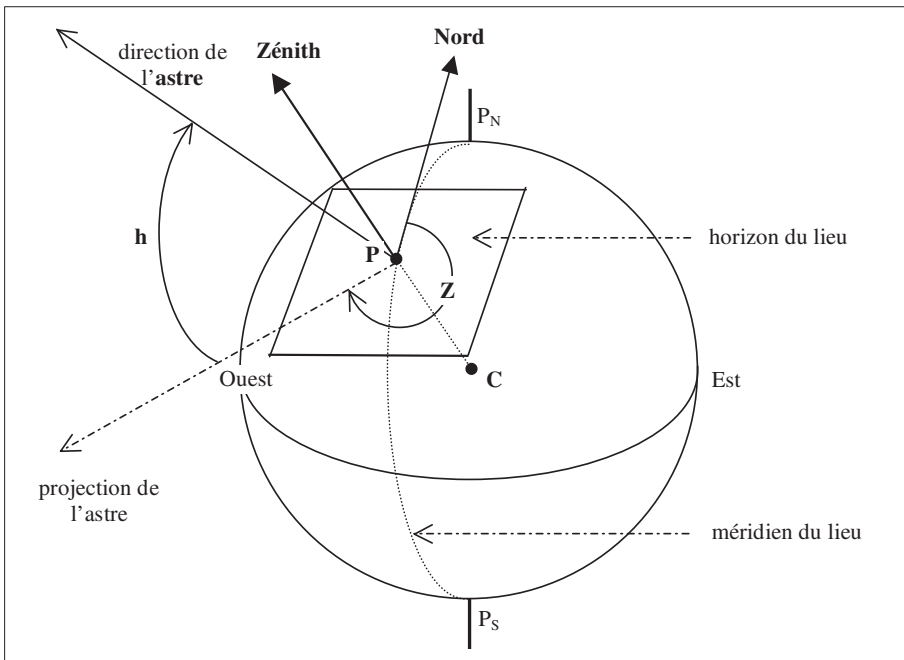


Figure 9.2 Coordonnées horizontales (locales) d'un astre : h est l'altitude ou la hauteur ; Z est l'azimut vrai ; $a = Z - 180^\circ$.

2.4 Distance zénithale

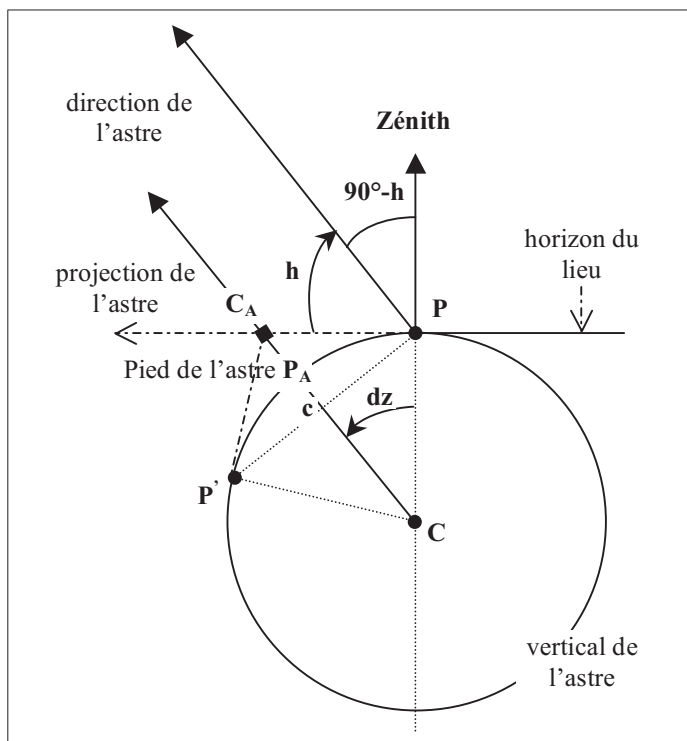


Figure 9.3 Plan vertical de l'astre et distance zénithale.

La figure 9.3 représente la hauteur h dans le vertical de l'astre.

L'angle complémentaire dz vaut $90^\circ - h$; c'est l'angle centré en P entre la direction du Zénith et celle de l'astre.

La droite menée en direction de l'astre à partir du centre C de la Terre coupe celle-ci au point P_A appelé **pied de l'astre**.

Compte tenu de la distance à la Terre, les directions de l'astre à partir de l'observateur en P ou du centre C sont parallèles, il n'y a pas de parallaxe.

On déduit donc :

$$(CP, CP_A) = 90^\circ - h = dz$$

dz est la **distance zénithale**, car exprimée en minutes, elle donne directement en milles la longueur de l'arc PP_A entre l'observateur et le pied de l'astre.

Les navigateurs déterminent la hauteur h de l'astre au dessus de l'horizon à l'aide d'un **sextant** ; instrument d'optique à deux miroirs dont un est inclinable et l'autre, observé au travers d'une lunette, comporte une partie réfléchissante. L'instant de la mesure étant noté, les éphémérides permettent d'en déduire les coordonnées horaires de l'astre (voir paragraphe suivant) et par conséquent la position de P_A .

L'observateur se situera donc sur le cercle de centre c et de rayon r tels que :

$$Cc = R \cos dz \quad r = R \sin dz \quad R \text{ étant le rayon terrestre.}$$

Ce cercle est appelé **cercle d'égales hauteurs** ; il correspond à la tangence avec la Terre du cône d'axe CP_A , de sommet C_A et de demi-angle d'ouverture h , comme représenté ci-dessus.

2.5 Monture alt-azimutale

Pour un observateur au point $P(L,G)$ qui voudrait observer un astre de position angulaire (h,Z) avec un instrument astronomique, lunette ou télescope, deux types de montures s'offrent à lui : **alt-azimutale** ou équatoriale ; la seconde sera décrite au paragraphe 3 suivant.

Le premier type de monture fait référence à l'altitude (hauteur) et à l'azimut ; en ce qui concerne les antennes on parle plutôt de montures, ou supports Azimut-Élévation (Az-El). La mise en station de telles montures s'effectue par rapport à l'horizon du lieu et par rapport au Nord, ou Sud. Une fois ce calage fait, le pointage s'opère à l'aide de deux rotations :

- une première autour d'un axe vertical (perpendiculaire au plan horizontal local) pour l'angle d'azimut,
- une deuxième autour d'un axe horizontal (perpendiculaire au précédent) pour l'angle de hauteur.

La figure 9.4 ci-dessous donne le schéma de principe d'une monture alt-azimutale :

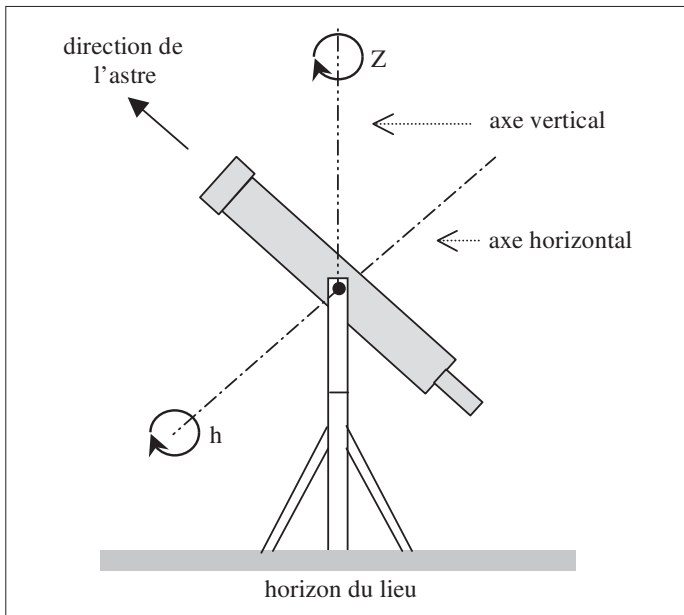


Figure 9.4 Instrument astronomique à monture alt-azimutale.

La visée d'un astre nécessite deux mouvements, un autour de chaque axe. Même pour une étoile considérée comme fixe, la rotation de la Terre autour d'un axe différent de l'axe vertical local va impliquer une action simultanée sur les deux axes afin de maintenir le pointage.

Le suivi peut toutefois être réalisé en pilotant par ordinateur le mouvement sur les axes.

3 Coordonnées horaires

3.1 Repère lié à la sphère terrestre

On considère à nouveau la sphère terrestre de centre C, d'axe celui des pôles, ainsi que les deux plans suivants :

- le plan équatorial contenant le cercle équatorial,
- le plan passant par l'axe des pôles contenant un demi-grand cercle particulier, le méridien de Greenwich.

Équateur et méridien de Greenwich se coupent en O.

3.2 Déclinaison

La droite menée du centre de la Terre en direction de l'astre coupe la sphère en P_A .

– L'angle entre cette droite et sa projection sur le plan équatorial est la **déclinaison D**. Tout comme la latitude, la déclinaison est comptée positivement du plan équatorial vers le pôle Nord. Elle est aussi notée δ .

– L'angle complémentaire est l'angle entre les directions du pôle Nord et de l'astre, considérées à partir de C. Il est dans le plan contenant l'axe des pôles et le point P_A qui est perpendiculaire au plan équatorial, l'intersection étant ainsi la projection de la droite CP_A .

Par conséquent, cet angle qui correspond à l'arc $P_N P_A$ vaut $90^\circ - D$; il porte le nom de **distance polaire**. On note :

$$(CP_N, CP_A) = 90^\circ - D$$



Considérons l'exemple du Soleil :

On a vu au chapitre 1 (paragraphe 2.1) que l'obliquité de l'écliptique était de $23^\circ 26' 21''$; aussi le Soleil semblant décrire une orbite dans le sens direct, sa déclinaison varie-t-elle comme suit :

- Elle croît du solstice d'hiver (21 ou 22 décembre) au solstice d'été (21 ou 22 juin) de $-23^{\circ} 26' 21''$ à $+23^{\circ} 26' 21''$, en passant par la valeur 0° à l'équinoxe de printemps (20 ou 21 mars).
- Elle décroît du solstice d'été au solstice d'hiver de $+23^{\circ} 26' 21''$ à $-23^{\circ} 26' 21''$, en passant par la valeur 0° à l'équinoxe d'automne (22 ou 23 septembre).

Pour les dates des équinoxes et solstices, on se référera à l'exercice E5-2. La figure 9.5 ci-dessous précise la configuration Terre-Soleil au solstice d'été.

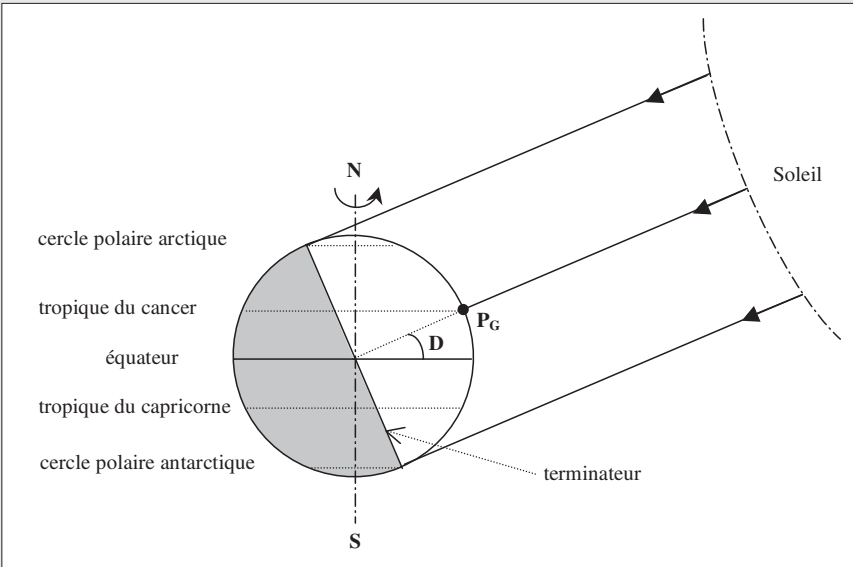


Figure 9.5 Solstice d'été : le parallèle correspondant au pied du Soleil est le tropique du Cancer.

On constate que pour $L > +66^{\circ} 33' 29''$ c'est le jour permanent ;
 $L < -66^{\circ} 33' 29''$ c'est la nuit permanente.

3.3 Cercle horaire de l'astre et angle horaire

Le demi-plan s'appuyant sur l'axe des pôles et contenant le pied de l'astre coupe la sphère terrestre selon un demi-grand cercle correspondant au *méridien de l'astre*, en fait dénommé **cercle horaire de l'astre**.

On définit alors deux angles horaires (AH) :

– L'angle entre le méridien de Greenwich et le cercle horaire de l'astre est l'**angle horaire origine** compté de 0° à 360° à partir du méridien origine, positivement vers l'Ouest.

On notera cet angle AHG (en anglais *Greenwich Hour Angle*) comme le font certains auteurs, toutefois la notation en vigueur dans les éphémérides est souvent :

- AHao pour l'angle horaire des planètes,
- AHvo pour l'angle horaire du Soleil.

– L'angle entre le méridien du lieu et le cercle horaire de l'astre est l'**angle horaire local** compté du méridien de l'observateur vers celui de l'astre avec les mêmes conventions que pour AHG.

On note cet angle AHL (en anglais *Local Hour Angle*), sachant que dans les éphémérides,

- AHag correspond à l'angle horaire local des planètes,
- AHvg correspond à l'angle horaire local du Soleil.

On constate que l'angle entre le méridien origine et le méridien local correspond à la longitude de l'observateur, elle aussi comptée positivement vers l'Ouest.

La relation liant angles horaires et longitude est par conséquent :

$$AHG = AHL + G$$

AHG se déduisant des éphémérides, on utilise plutôt :

$$AHL = AHG - G$$

Déclinaison et angles horaires sont représentés à la figure 9.6 :

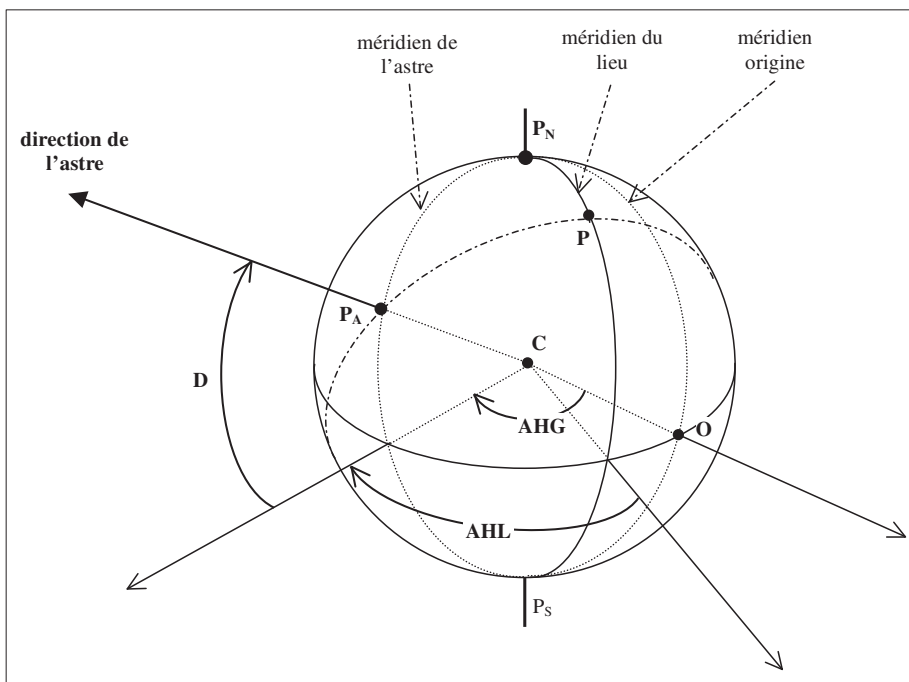


Figure 9.6 Coordonnées horaires d'un astre : D ou δ est la déclinaison ; AHG et AHL sont les angles horaires origine et local.

3.4 Angle horaire et temps

La vitesse angulaire de rotation de la Terre est d'environ $15^\circ/\text{h}$ d'Ouest en Est. Dans le référentiel terrestre, en dehors de leur mouvement propre, les astres apparaissent tourner vers l'Ouest à une vitesse $V \approx + 15^\circ/\text{h}$.

Ainsi, si AHG n'est donné chaque jour qu'à 0 h TU, soit AHG(0), on déduit qu'à l'instant t exprimé en heures,

$$\text{AHG}(t) = \text{AHG}(0) + Vt$$

Dans des éphémérides se rapportant au Soleil, V est souvent fournie avec une précision de trois ou quatre chiffres après la virgule. Si la vitesse horaire ne figure pas, on en calculera une valeur moyenne selon la périodicité avec laquelle AHG est donné (par exemple toutes les 24 heures).

Pour les planètes, la **variation horaire** V est mise sous la forme :

$$V = (15 + v)^\circ/\text{h}$$

Les corrections horaires v à appliquer, dont l'ordre de grandeur est de quelques minutes, sont fournies pour la journée considérée ; elles sont positives, sauf parfois pour Vénus qui peut présenter ainsi une variation horaire inférieure à $15^\circ/\text{h}$.

3.5 Monture équatoriale

Par rapport à la monture alt-azimutale vue au paragraphe 2 précédent, le but ultime de la **monture équatoriale** est de s'affranchir de la poursuite d'un astre fixe tel qu'une étoile.

On choisit donc l'axe principal de rotation du télescope parallèle à l'axe des Pôles, c'est-à-dire qu'il fait un angle avec le plan horizontal local égal à la latitude du lieu comme précisé à la figure 9.7.

Une simple rotation autour de l'axe horaire permettra de suivre un astre dont la déclinaison est constante ; et pour une étoile, il suffira que la rotation appliquée par le moteur d'entraînement soit opposée à celle de la Terre pour délivrer l'observateur de toute action sur les axes...

L'axe perpendiculaire au précédent, donc parallèle à l'équateur, est l'axe des déclinaisons.

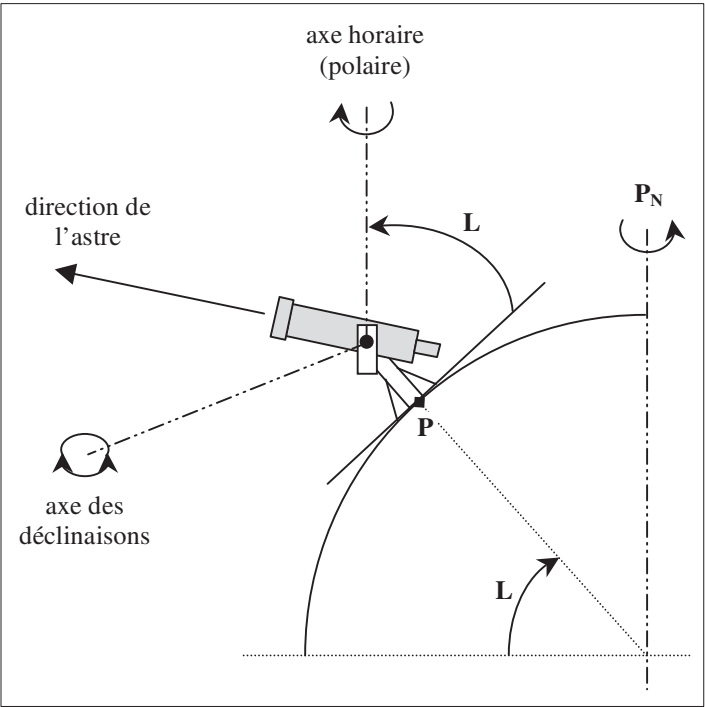


Figure 9.7 Instrument astronomique à monture équatoriale.

4 Relations entre coordonnées horaires et locales

4.1 Triangle sphérique

■ Triangle de position

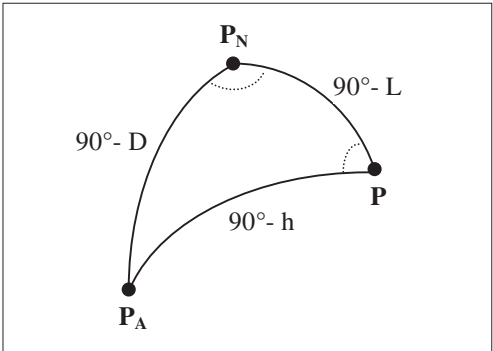


Figure 9.8 Triangle de position de sommets : le pôle nord, le point d'observation et le pied de l'astre.

Le Pôle Nord P_N est à l'intersection du méridien du lieu et du cercle horaire de l'astre. Le vertical de l'astre coupe les méridiens précédents respectivement en P, position de l'observateur, et P_A pied de l'astre.

Le triangle sphérique $PP_N P_A$ ainsi formé (voir figure 9.8) est appelé **triangle de position**. Trois arcs de cercle forment ses côtés, dont les noms sont rappelés ci-dessous :

- la colatitude de valeur $90^\circ - L$ correspondant à l'arc $P_N P$,
- la distance polaire de valeur $90^\circ - D$ correspondant à l'arc $P_N P_A$,
- la distance zénithale de valeur $90^\circ - h$ correspondant à l'arc PP_A .

Deux des trois angles internes du triangle de position sont identifiables :

- L'angle $\hat{P}_N$ de sommet P_N qui correspond à AHL si le méridien de l'astre est à l'Ouest de celui du lieu, et à $360^\circ - AHL$ dans le cas inverse.
- L'angle $\hat{P}$ de sommet P qui correspond à $360^\circ - Z$ si le méridien de l'astre est à l'Ouest de celui du lieu, et à Z dans le cas contraire, car on a vu que l'azimut est compté positivement vers l'Est.

■ Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique

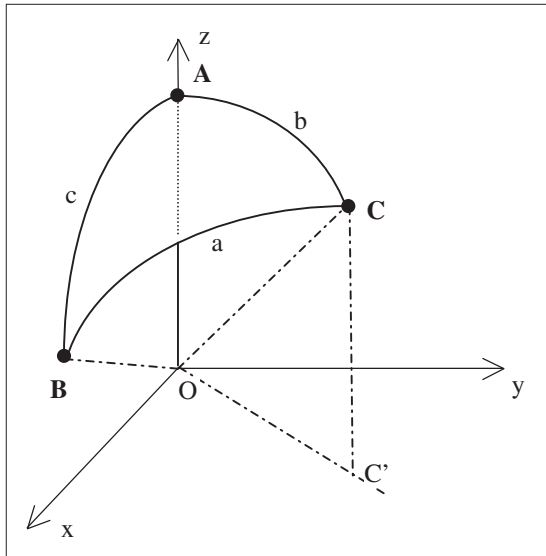


Figure 9.9 Triangle sphérique ABC.

On considère le triangle sphérique découpé sur la sphère unité de centre O dans le repère orthonormé $\{O, x, y, z\}$, comme indiqué sur la figure 9.9 :

A est sur l'axe Oz,

$$\rightarrow \overline{OA} = (0, 0, 1)$$

B est dans le plan $\{xOz\}$,

$$\rightarrow \overline{OB} = (\sin c, 0, \cos c)$$

C a une position quelconque, et se projette en C' sur le plan {xOy},

$$OC' = \sin b \quad \text{et} \quad (\text{Ox}, OC') = \hat{A}$$

$\hat{A}$ étant l'angle des tangentes en A aux arcs AB et AC. Les coordonnées de $\overline{OC}$ sont :

$$\rightarrow \overline{OC} = (\sin b \cos \hat{A}, \sin b \sin \hat{A}, \cos b)$$

Effectuant le produit scalaire des vecteurs $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$, il vient :

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = \|\overline{OB}\| \cdot \|\overline{OC}\| \cos(\overline{OB}, \overline{OC}) = \cos a$$

Puisque l'on connaît également les coordonnées des deux vecteurs, on en déduit la première formule fondamentale :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$$

Cette formule permet de déterminer le troisième côté du triangle sphérique connaissant les deux autres et l'angle qu'ils forment. Inversement, si les trois côtés sont connus, on obtient par exemple l'angle $\hat{A}$ par la relation :

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad b \text{ et } c \neq 0$$

L'encadré ci-dessous reproduit l'ensemble des formules, relations de Gauss(*), que l'on peut déduire du triangle sphérique :

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \\ \sin a \sin \hat{B} &= \sin b \sin \hat{A} \\ \sin a \cos \hat{B} &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} &= -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a \\ \cos a \cos \hat{C} &= \sin a \cot b - \sin \hat{C} \cot \hat{B} \\ \text{Aire} &= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi \end{aligned}$$

(*) Carl Friedrich Gauss est né à Brunswick, en Allemagne, le 30 avril 1777. Très tôt, ses talents de mathématicien furent connus et grâce à Ferdinand, duc de Brunswick, il put poursuivre des études et intégrera l'Université de Göttingen en 1795 où il restera comme professeur jusqu'à sa mort le 23 février 1855.

Il eut à effectuer la topographie de plusieurs régions d'Allemagne ; à cette occasion, il donna un support théorique aux erreurs aléatoires et fit progresser la géométrie non euclidienne. Celle des espaces elliptiques ou géométrie sphérique trouve une application en cartographie grâce aux relations entre les éléments du triangle sphérique.

Le Français Adrien-Marie Legendre (1752-1833) s'est également intéressé à la géodésie et à la trigonométrie sphérique.

4.2 Passage des coordonnées horaires aux coordonnées horizontales

On applique les formules de la trigonométrie sphérique au triangle de position, afin de déterminer hauteur et azimuth de l'astre.

■ Détermination de la hauteur h

Les arcs $P_N P_A$ et $P_N P$ étant connus, de même que l'angle $\hat{P}_N$ entre ceux-ci, la substitution donne :

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - L)\cos(90^\circ - D) \\ &\quad + \sin(90^\circ - L)\sin(90^\circ - D)\cos\hat{P}_N\end{aligned}$$

soit :

$$\sinh = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos \hat{P}_N$$

avec :

$$\hat{P}_N = \text{AHL (astre à l'Ouest) ou } 360^\circ - \text{AHL (astre à l'Est)}$$

mais dans les deux cas :

$$\cos \hat{P}_N = \cos \text{AHL}$$

Ainsi, la formule donnant la hauteur est :

$$\sinh = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos \text{AHL}$$

La hauteur de l'astre dépend directement de sa déclinaison et de la latitude d'observation ; et elle dépend de la longitude par l'intermédiaire de l'angle horaire local, puisque $\text{AHL} = \text{AHG} - G$.

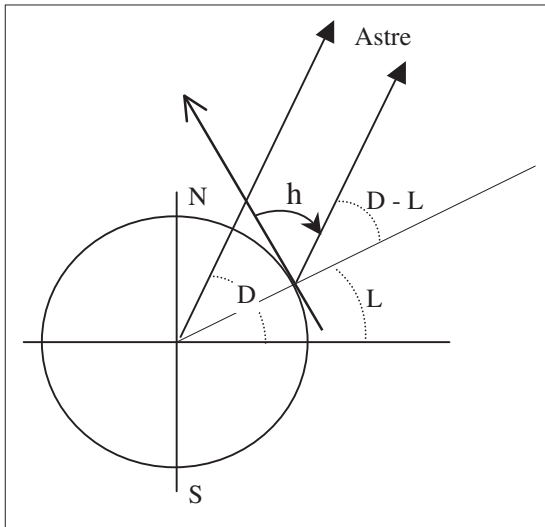


Figure 9.10 Astre au méridien du lieu.

Si $AHL = 0$, l'astre est au méridien du lieu, et la formule donnant la hauteur devient :

$$\sinh = \cos(D - L) = \sin[90^\circ - (D - L)]$$

On retient :

$$h = 90^\circ - (D - L)$$

conformément à l'orientation précisée sur la figure 9.10.

L'astre sera visible au méridien pourvu que :

$$0 < h < 180^\circ$$

soit pour

$$-90^\circ < D - L < 90^\circ$$



On en déduit une méthode, dite de la **latitude à la méridienne**, pour déterminer L ; car mesurant h , on a directement :

$$L = D - (90^\circ - h)$$



Si $D < L$, $h > 90^\circ$; on choisit alors la référence par rapport à la direction du Sud, c'est-à-dire que :

$$h = 90^\circ + (D - L)$$

Ainsi, pour une latitude de $L = 45^\circ$, au solstice d'été, le Soleil culminera à $h = 68^\circ 26' 21''$.

■ Détermination de l'azimut Z

• En utilisant la relation donnant l'angle en fonction des trois côtés :

On considère l'angle $\hat{P}$ compris entre les arcs PP_N et PP_A ; appliquant la formule donnant l'angle $\hat{A}$ du triangle sphérique, on écrit :

$$\cos \hat{P} = \frac{\cos(90^\circ - D) - \cos(90^\circ - L)\cos(90^\circ - h)}{\sin(90^\circ - L)\sin(90^\circ - h)}$$

soit :

$$\cos \hat{P} = \frac{\sin D - \sin L \sin h}{\cos L \cos h}$$

$$\text{si } 0^\circ \leq AHL < 180^\circ \quad Z = 360^\circ - \hat{P} \quad (\text{astre à l'Ouest})$$

$$\text{si } 180^\circ \leq AHL < 360^\circ \quad Z = \hat{P} \quad (\text{astre à l'Est})$$

Notons que si l'angle horaire local est nul,

$$\sin h = \cos(D - L) \quad \underline{h = 90^\circ + (D - L)} \rightarrow \underline{\cos h = -\sin(D - L)}$$

et on vérifie que :

$$\cos \hat{P} = -1 \quad \text{d'où } Z = 180^\circ$$

- En exprimant sa tangente à partir des deux formules de Gauss :

$$\sin a \sin \hat{B} = \sin b \sin \hat{A}$$

$$\sin a \cos \hat{B} = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \hat{A}$$

On fait les correspondances : $B \rightarrow P, A \rightarrow P_N, C \rightarrow P_A$

$$\text{d'où : } b \rightarrow (90^\circ - D), a \rightarrow (90^\circ - h), c \rightarrow (90^\circ - L)$$

$$\text{ce qui conduit à : } \cos h \sin \hat{P} = \cos D \sin \hat{P}_N$$

$$\cos h \cos \hat{P} = \sin D \cos L - \cos D \sin L \cos \hat{P}_N$$

Lorsque le méridien de l'astre est à l'Ouest, $\hat{P} = 360^\circ - Z$ et $\hat{P}_N = \text{AHL}$

lorsqu'il est à l'Est, $\hat{P} = Z$ et $\hat{P}_N = 360^\circ - \text{AHL}$

Donc quelle que soit la position du méridien de l'astre par rapport à celui du lieu, on a :

$$\cos h \sin Z = -\cos D \sin \text{AHL}$$

$$\cos h \cos Z = \sin D \cos L - \cos D \sin L \cos \text{AHL}$$

d'où on déduit l'expression de la tangente :

$$\text{tg } Z = \frac{-\cos D \sin \text{AHL}}{\sin D \cos L - \cos D \sin L \cos \text{AHL}}$$

Si l'application numérique conduit à une valeur négative de la tangente, il faut rajouter 180° à l'angle obtenu ; si d'autre part $\text{AHL} < 180^\circ$, il faut également rajouter 180° à l'angle obtenu !

■ Point astronomique

La formule de la hauteur dans laquelle on explicite le temps, s'écrit :

$$\sin h = \sin L \sin D(t) + \cos L \cos D(t) \cos [\text{AHG}(t) - G]$$

Pour un astre donné, à une heure donnée, les éphémérides permettent de calculer la déclinaison et l'angle horaire origine. On en déduit une méthode, basée sur la mesure de la hauteur d'un astre, pour faire le **point astronomique** ; c'est-à-dire déterminer la latitude et la longitude du lieu d'observation P :

À l'instant donné t_1 , on mesure la hauteur h_1 de l'astre sélectionné ; puis à l'instant t_2 on mesure la hauteur h_2 du même astre ou d'un deuxième. Sur une plateforme mobile (bateau ou aéronef) on utilise à cette fin un sextant ; sur terre on utilise un théodolite.

On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\sin h_1 = \sin L \sin D(t_1) + \cos L \cos D(t_1) \cos [AHG(t_1) - G]$$

$$\sin h_2 = \sin L \sin D(t_2) + \cos L \cos D(t_2) \cos [AHG(t_2) - G]$$

Il permet de déterminer les coordonnées de P, avec toutefois une précision affectée par la mobilité de la plateforme.

4.3 Passage des coordonnées horizontales aux coordonnées horaires

Il s'agit cette fois d'exprimer la déclinaison D et l'angle horaire local AHL en fonction de la hauteur h et de l'azimut Z.

On part des trois premières formules de Gauss qui après deux permutations circulaires successives s'écrivent :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}$$

$$\sin c \sin \hat{A} = \sin a \sin \hat{C}$$

$$\sin c \cos \hat{A} = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \hat{C}$$

Faisant correspondre par simple translation les triangles sphériques des figures 9.8 et 9.9, on aboutit à :

$$\sin D = \sin h \sin L + \cos h \cos L \cos \hat{P}$$

$$\cos D \sin \hat{P}_N = \cos h \sin \hat{P}$$

$$\cos D \cos \hat{P}_N = \sin h \cos L - \cos h \sin L \cos \hat{P}$$

Quelles que soient les positions relatives des méridiens de l'astre et du lieu, on obtient finalement :

$$\sin D = \sin h \sin L + \cos h \cos L \cos Z$$

$$\cos D \sin AHL = -\cos h \sin Z$$

$$\cos D \cos AHL = \sin h \cos L - \cos h \sin L \cos Z$$

et la tangente de l'angle horaire local a pour expression :

$$\text{tg AHL} = \frac{-\cos h \sin Z}{\sin h \cos L - \cos h \sin L \cos Z}$$

exercices

E9-1 Orthodromie

On se propose de calculer la plus courte distance, ou **géodésique**, entre deux points P_1 et P_2 sur notre planète de centre C .

1. Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point P dont les coordonnées sphériques sont (R, L, G) . On positionnera sur une figure ce point dans le référentiel choisi d'origine C .

2. Donner l'expression de l'angle θ entre les vecteurs $CP_1(R_1, L_1, G_1)$ et $CP_2(R_2, L_2, G_2)$.

3. Quelle est la longueur L de l'arc de grand cercle reliant le centre Guyanais de Kourou à Toulouse Blagnac ?

Données : Kourou, $L_2 = 5^\circ 14' N$ $G_2 = 52^\circ 45' W$
 Toulouse, $L_1 = 43^\circ 38' N$ $G_1 = 1^\circ 22' E$
 Rayon terrestre = 6378 km

solutions

1. Coordonnées x, y, z de P

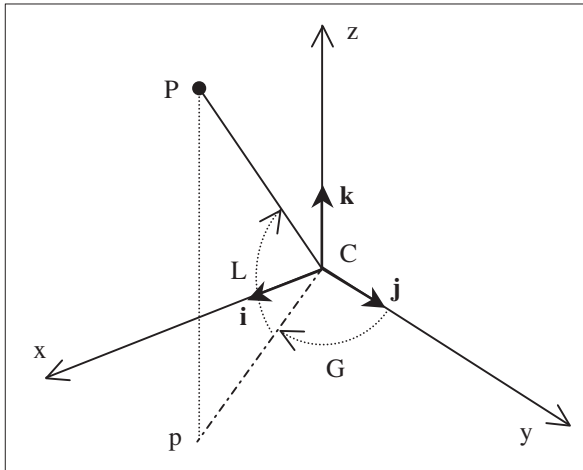


Figure 9.11 Repérages du point P.

Le repère cartésien choisi est tel que :

- C est le centre de la Terre,
- les axes Cx et Cy sont dans le plan équatorial,
- les axes Cy et Cz appartiennent au plan du méridien origine.

La projection de P sur le plan équatorial est p , avec :

$$Cp = R \cos L$$

Les coordonnées cartésiennes de P sont :

$$\begin{aligned}x &= R \cos L \sin G \\y &= R \cos L \cos G \\z &= R \sin L\end{aligned}$$

2. Angle θ des vecteurs $\overrightarrow{CP_1}$ et $\overrightarrow{CP_2}$

Dans le repère $\{C, x, y, z\}$ les vecteurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP_1} &= R_1 \cos L_1 \sin G_1 \vec{i} + R_1 \cos L_1 \cos G_1 \vec{j} + R_1 \sin L_1 \vec{k} \\ \overrightarrow{CP_2} &= R_2 \cos L_2 \sin G_2 \vec{i} + R_2 \cos L_2 \cos G_2 \vec{j} + R_2 \sin L_2 \vec{k}\end{aligned}$$

On effectue leur produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP_1} \overrightarrow{CP_2} &= R_1 R_2 (\cos L_1 \cos L_2 \sin G_1 \sin G_2 \\ &\quad + \cos L_1 \cos L_2 \cos G_1 \cos G_2 + \sin L_1 \sin L_2) \\ &= R_1 R_2 [\cos L_1 \cos L_2 \cos(G_2 - G_1) + \sin L_1 \sin L_2]\end{aligned}$$

En fonction de l'angle θ , le produit scalaire a aussi pour expression :

$$\overrightarrow{CP_1} \overrightarrow{CP_2} = R_1 R_2 \cos \theta$$

Par identification, on obtient finalement la relation :

$$\cos \theta = [\cos L_1 \cos L_2 \cos(G_2 - G_1) + \sin L_1 \sin L_2]$$

3. Distance orthodromique $\mathcal{L}$ Kourou Toulouse

$$\begin{array}{lll}\mathcal{L} = R\theta & \text{Kourou :} & L_2 = +5^\circ,23 \quad G_2 = +52^\circ,75 \\ & \text{Toulouse :} & L_1 = +43^\circ,63 \quad G_1 = -1^\circ,37\end{array}$$

On calcule $\cos \theta = 0,485\,348$

d'où : $\mathcal{L} = 6786 \text{ km}$

E9-2 Intérêt d'une base de lancement équatoriale

1. L'injection d'un satellite sur l'orbite de transfert est supposée effectuée au voisinage M de la base de lancement de latitude L et longitude G.

a) Représenter le point M dans un référentiel d'origine le centre C de la Terre et dont l'axe des x est l'intersection du méridien du lieu avec le plan équatorial.

b) Dans quel plan doit se situer la vitesse d'injection $\vec{V}$ si l'on veut que le point M corresponde au périégée ?

c) Quelles sont les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{CM}$ de module R et du vecteur vitesse $\vec{V}$ d'angle α avec la direction de l'Est ?

d) Préciser le plan de l'orbite de transfert. À quelle relation, fonction des angles α et L, satisfait son inclinaison i sur l'équateur ? Commenter.

2. Lors du lancement, on veut bénéficier de la **vitesse d'entraînement** due à la rotation de la Terre.

a) Calculer la vitesse tangentielle de rotation de la Terre à l'équateur ; en déduire la vitesse de rotation à la latitude L . Faire l'application numérique pour les centres de Kourou, Cap Canaveral et Baïkonour.

b) Quelle est l'expression de l'énergie cinétique massique au sol à la latitude L ? Se référant à l'exercice E7-1, écrire les expressions littérale et numérique de l'énergie mécanique massique au sol.

3. On désire maintenant passer de l'orbite de transfert à l'orbite circulaire équatoriale.

a) Dans quel plan le périégée, point P de l'orbite de transfert, devra-t-il se situer ? Justifier.

b) Pourquoi l'opération de changement du plan d'orbite doit-elle s'effectuer à l'apogée (point A) ?

c) En supposant que la correction d'inclinaison se fasse en une seule fois et en même temps que la **circularisation**, déterminer l'impulsion de vitesse $\overline{\Delta V}$ à appliquer en fonction de la vitesse V_A et de la vitesse requise V_2 , i étant l'angle des vitesses.

d) Représenter l'orbite de transfert et la composition des vitesses en A dans le plan perpendiculaire à la ligne des apsides.

Données : Rayon terrestre = 6378,14 km Jour sidéral = 86 164,1 s

Kourou : $L = 5^\circ 14' N$ $G = 52^\circ 45' W$

Cap Canaveral : $L = 28^\circ 27' N$ $G = 80^\circ 32' W$

Baïkonour : $L = 46^\circ 15' N$ $G = 63^\circ 15' E$

$V_A = 1,597 \text{ km.s}^{-1}$ $V_2 = 3,075 \text{ km.s}^{-1}$ (voir exercice E7-2) $i = 28^\circ 27'$.

solutions

1. Plan de l'orbite de transfert

a) Voir figure 9.12a.

b) Si l'on veut que le point d'injection corresponde au périégée de l'orbite de transfert, il faut satisfaire à : $\vec{V} \perp \overline{CM}$

→ $\vec{V}$ est dans le plan horizontal contenant M .

c) Les coordonnées cartésiennes de $\overline{CM}$ sont : $|x = R \cos L$

$|y = 0$

$|z = R \sin L$

Le vecteur $\vec{V}$, situé dans le plan horizontal local, fait l'angle a avec la direction de l'Est ; sa projection dans cette direction est $V \cos a$, c'est la composante suivant l'axe Cy .

Les deux autres composantes se déduisent de l'observation de la figure 9-12b ; d'où :

$$|x| = -V \sin a \sin L$$

$$|y| = V \cos a$$

$$|z| = V \sin a \cos L$$

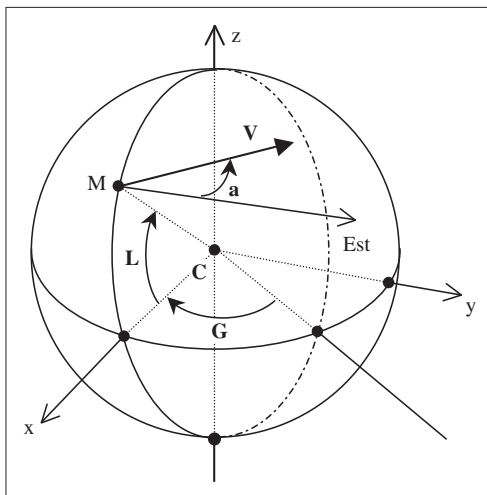


Figure 9.12a Vitesse au lieu d'injection.

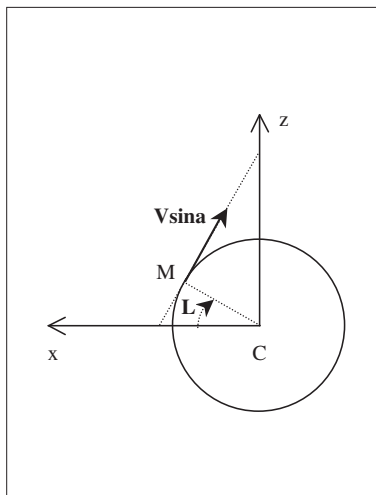


Figure 9.12b Vitesse dans le méridien du lieu.

d) Le vecteur vitesse $\vec{V}$ en M et le centre C de la Terre déterminent le plan de l'orbite de transfert.

Ce plan admet le vecteur $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}}{\|\overrightarrow{CM}\| \|\vec{V}\|}$ comme vecteur unitaire normal ; ses coordonnées sont :

$$|x| = -\cos a \sin L$$

$$|y| = -\sin a$$

$$|z| = \cos a \cos L$$

Un vecteur unitaire normal au plan équatorial est $\vec{k} = (0,0,1)$.

Les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{k}$ font entre eux l'angle d'inclinaison i cherché qui satisfait à :

$$\cos i = \cos a \cos L$$

En conséquence, puisque $\cos i \leq \cos L$:

$$i \geq L$$

L'inclinaison de l'orbite de transfert ne peut donc être inférieure à la latitude du lieu de lancement. Le cas limite où l'inclinaison est égale à la latitude est obtenu pour un tir vers l'Est ($a = 0$) donc parallèle au plan équatorial.

Pour $a = \pm \pi/2$, $i = \pm \pi/2 \rightarrow$ on obtient une orbite polaire.

En conclusion, seule une base équatoriale permet d'obtenir toutes les inclinaisons désirées.

2. Gain de vitesse

a) La vitesse tangentielle de rotation de la Terre à l'équateur est :

$$V_T = R_T \omega_T = \frac{2\pi R_T}{J_{\text{Sid}}} \rightarrow V_T = 465 \text{ m.s}^{-1}$$

La vitesse tangentielle à un petit cercle de latitude L est : $V_L = 465 \cos L \text{ m.s}^{-1}$

Kourou : $L = 5^\circ, 23 \rightarrow V_L = 463 \text{ m.s}^{-1}$

Cap Canaveral : $L = 28^\circ, 45 \rightarrow V_L = 409 \text{ m.s}^{-1}$

Baïkonour : $L = 46^\circ, 25 \rightarrow V_L = 322 \text{ m.s}^{-1}$

b) L'énergie cinétique massique au sol à la latitude L est :

$$\frac{E_c}{m} = \frac{1}{2} V_L^2 = 0,108 \cos^2 L \text{ MJ / kg}$$

$$\frac{E}{m} = -\frac{GM_T}{R_T} + \frac{1}{2} V_L^2 \rightarrow \frac{E}{m} = (-62,495 + 0,108 \cos^2 L) \text{ MJ / kg}$$

3. Modification de l'orbite

a) Il faut que l'orbite de transfert puisse pivoter autour de l'axe des nœuds, intersection du plan équatorial avec cette orbite (voir chapitre 11). Donc le point P correspondant au périégée doit être dans le plan équatorial ; en conséquence, la ligne des apsides est confondue avec la ligne des nœuds.

b) La vitesse V_A à l'apogée étant plus faible qu'au périégée, l'impulsion de vitesse ΔV à appliquer sera également plus faible et impliquera en conséquence une moindre consommation de propergol.

c)

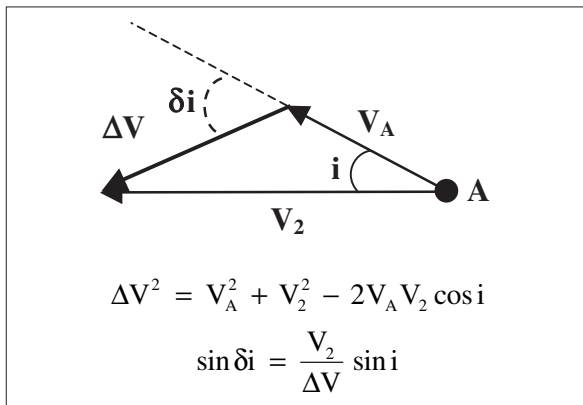


Figure 9.13a Triangle de vitesses permettant d'atteindre le module et l'angle de la correction.

Vitesse à l'apogée de l'orbite de transfert :

$$V_A = 1,597 \text{ km.s}^{-1}$$

Vitesse sur l'orbite géostationnaire :

$$V_2 = 3,075 \text{ km.s}^{-1}$$

Angle des deux plans orbitaux :

$$i = 28^\circ,45$$

L'application numérique donne

$$\Delta V = \sqrt{12,0055 - 9,8231 \cos i} \text{ km.s}^{-1}, \text{ soit :}$$

$$\Delta V = 1,835 \text{ km.s}^{-1}$$

et

$$\delta i = 52^\circ,945$$

d)

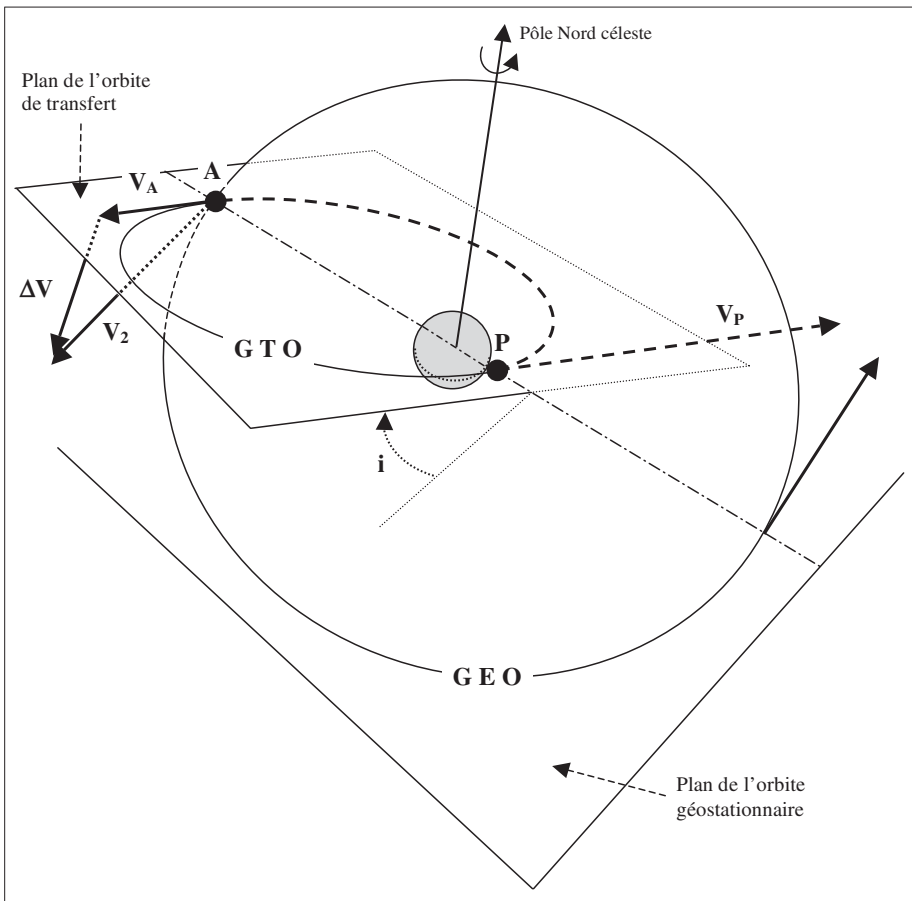


Figure 9.13b Changement du plan d'orbite et circularisation.
GTO pour *Transfer Earth Orbit* ; GEO pour *Geostationary Earth Orbit*.

➤ Remarque

Le lancement d'un satellite de la base de Kourou en Guyane vers l'orbite géostationnaire comprend :

- la phase de montée verticale hors de l'atmosphère qui dure 3 minutes et est assurée par le premier étage de la fusée ;
- la phase intermédiaire qui est assurée par le deuxième étage et au cours de laquelle montée et mise en vitesse se poursuivent pendant 2 minutes, mais le rôle de cette phase est également d'infléchir la trajectoire qui doit être horizontale en fin de combustion ;
- la phase d'accélération horizontale qui dure environ 12 minutes de façon à ce que le satellite atteigne la vitesse de 10,239 km/s au passage à la verticale de l'équateur ; ajoutons qu'avant sa séparation à l'issue de cette phase, le satellite est orienté et stabilisé par mise en rotation sur lui-même.

À l'apogée, c'est-à-dire après 5 h 15 min 32 s à compter du passage au périégée, le satellite ayant été correctement orienté, son moteur d'apogée fournira l'accroissement $\overline{\Delta V}$ de vitesse requis.

E9-3 Coordonnées d'un satellite géostationnaire au lieu d'observation

Un seul paramètre suffit à déterminer la position d'un satellite géostationnaire : l'axe de référence est l'intersection du plan contenant le méridien de Greenwich avec le plan équatorial contenant l'orbite. À partir de cette référence, l'angle donnant la position sur l'orbite équatorial est compté de 0 à 180° Est ou Ouest.

On se propose de déterminer l'angle d'azimut A et l'angle de site S d'un satellite situé à D degrés Est et observé d'une station située au point P de latitude L et longitude G .

La configuration est représentée sur la figure 9.14 en fin d'énoncé.

En P est tracé le plan horizontal local (H) perpendiculaire au rayon $FP = R$; R est le rayon terrestre. La normale à ce plan en P est la verticale $\vec{V}$.

– L'intersection de (H) avec le plan contenant le méridien local est la droite (PP_3) .

– L'intersection de (H) avec le plan contenant $\vec{V}$ et le satellite en S est la droite (PP_4) .

Les points P_3 et P_4 appartiennent au plan équatorial.

- 1.** Préciser à l'aide de la figure les angles D , L , G , A et S .
- 2.** On pose $\theta = (FS, FP)$; quelle relation lie θ aux angles D, G et L ?
- 3.** Donner l'expression de la tangente de l'azimut A .

$$R = 6\,378\text{ km} \qquad H = 35\,788\text{ km}$$

$$(\text{PP}_3) \perp \vec{V} \quad \rightarrow \quad \text{FP}_3 \cos L = R$$

Le plan (H) et le plan équatorial sont perpendiculaires au plan contenant le méridien local, d'où :

$$(P_3P_4) \perp (FP_3) \rightarrow FP_4 \cos(D - G) = FP_3$$

Des trois égalités, on déduit :

$$\cos \theta = \cos L \cos(D - G)$$

3. Tangente de l'azimut A

$$(P_3P_4) \perp (PP_3) \rightarrow \operatorname{tg} A = P_3P_4 / PP_3$$

Or,

$$\operatorname{tg}(D - G) = P_3P_4 / FP_3$$

et

$$\sin L = PP_3 / FP_3$$

d'où :

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg}(D - G)}{\sin L}$$

4. Tangente de l'angle de site S

Par construction, $\theta = (PP_0, PP_4)$,

d'où :

$$\operatorname{tg}(\theta + S) = \frac{P_0S}{PP_0} = \frac{H + R - R \cos \theta}{R \sin \theta} = \left(\frac{H + R}{R \cos \theta} - 1 \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

Or

$$\operatorname{tg}(\theta + S) = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} S}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} S}$$

Ainsi on réarrange comme suit :

$$\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} S = \left(\frac{H + R}{R \cos \theta} - 1 \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} - \operatorname{tg} S \right)$$

et, isolant $\operatorname{tg} S$, on obtient :

$$\operatorname{tg} S = \frac{\cos \theta - R / (R + H)}{\sin \theta}$$

5. Tableau de l'azimut A et du site S des 5 satellites

On donne également la valeur de l'angle θ .

Pour les calculs, on transforme L et G : $L = 48^\circ,596$; $G = 2^\circ,332$.

nom du satellite	position D	azimut A	site S	θ
EUTELSAT II F4	10°,0 E	10°,176 ou 10° 11' E	33°,727 ou 33° 44' N	49°,046 ou 49° 03' N
ASTRA 1	19°,2 E	22°,011 ou 22° 01' E	31°,886 ou 31° 53' N	50°,735 ou 50° 44' N
TÜRKSAT 1C	42°,0 E	47°,871 ou 47° 52' E	22°,574 ou 22° 34' N	59°,397 ou 59° 24' N
INTELSAT 804	64°,0 E	67°,981 ou 67° 59' E	09°,719 ou 09° 43' N	71°,707 ou 71° 42' N
EXPRESS 6A	80°,0 E	80°,688 ou 80° 41' E	-0°,579 ou 00° 35' S	81°,880 ou 81° 53' N

➤ Remarques

Le satellite russe *EXPRESS 6A* ne pourra être vu puisqu'il se trouve juste sous l'horizon local. Il faut en effet remplir la condition :

$$\cos \theta \geq \frac{R}{R + H} \rightarrow \cos(D - G) \geq \frac{1}{\cos L} \frac{R}{R + H} = 0,228708$$

soit :

$$D - G < 76^{\circ},779$$

d'où

$$D < 79^{\circ},111 \text{ E}$$

On notera que si le satellite est trop bas sur l'horizon, la qualité du signal reçu sera affectée par le bruit rayonné par la Terre.

E9-4 Coordonnées locales du Soleil au cours de la journée

On se propose de déterminer les coordonnées locales du Soleil à certains moments de la journée du 1^{er} juillet 2004 à Paris dont les coordonnées géographiques sont :

$$L = +48^{\circ} 50' 11'' \quad G = -2^{\circ} 20' 15''$$

À 0 heure UT, l'angle horaire du Soleil compté à partir du méridien de Greenwich, et la déclinaison ont pour valeurs respectives :

$$\text{– le 1^{er} juillet : } AHG = 179^{\circ} 5' 30'' \quad D = 23^{\circ} 6' 0''$$

$$\text{– le 2^e juillet : } AHG = 179^{\circ} 0' 0'' \quad D = 23^{\circ} 1' 42''$$

1. Calculer, en préliminaire, les variations horaires V de l'angle horaire et d de la déclinaison.
2. Calculer la hauteur h et l'azimut Z du Soleil à 6 h, 8 h, 10 h, 12 h, 14 h, 16 h et 18 h UT.
3. À quelle heure le Soleil passe-t-il au méridien de l'observateur ? Quelle est alors sa hauteur ?
4. Calculer les heures de lever et de coucher de l'astre, ainsi que les azimuts correspondants Z_l et Z_c .
5. Qu'est ce que le crépuscule ? Calculer l'heure et l'azimut du lever, ainsi que l'heure et l'azimut du coucher du Soleil pour $h = -50'$, $-6'$, $-12'$ et $-18'$.

☞ solutions

1. Variations horaires V de l'angle horaire et d de la déclinaison

On transforme les données sexagésimales en données décimales :

$$\text{– le 1^{er} juillet : } AHG = 179^{\circ},0917 \quad D = 23^{\circ},1$$

$$\text{– le 2^e juillet : } AHG = 179^{\circ} \quad D = 23^{\circ},0283$$

En 24 heures, le Soleil tourne de $359^{\circ},9083 \rightarrow V = 14^{\circ},9962 / \text{h}$
 et : $AHG(t) = AHG(0) + Vt$
 En 24 heures, la déclinaison décroît de $0^{\circ},0717 \rightarrow d = -0^{\circ},0030 / \text{h}$
 et : $D(t) = D(0) + dt$

2. Hauteur h et azimut Z

• Calcul détaillé à 8 h UT

$AHL(t) = AHG(t) - G = 301^{\circ},3986$ et $D(t) = 23^{\circ},0761$

– La hauteur se déduit de :

$$\sin h = \sin L \sin D(t) + \cos L \cos D(t) \cos AHL(t) = 0,610\,557$$

$$\rightarrow h = 37^{\circ},6298$$

$$\rightarrow h = 37^{\circ}\,37'\,47''$$

– Deux relations permettent de calculer Z :

$$\rightarrow \cos \hat{P} = \frac{\sin D(t) - \sin L \sinh}{\cos L \cos h} = -0,129\,861 \rightarrow \hat{P} = 97^{\circ},4615$$

Or $180^{\circ} \leq AHL < 360^{\circ}$, donc $Z = \hat{P} \rightarrow Z = 97^{\circ}\,27'\,42''$

$$\rightarrow \operatorname{tg} Z = \frac{-\cos D(t) \sin AHL(t)}{\sin D(t) \cos L - \cos D(t) \sin L \cos AHL(t)} = -7,635\,360$$

Des deux valeurs $Z = -82^{\circ},5385$ et $Z = 97^{\circ},4615$, seule la deuxième convient.

• Tableau des valeurs en fonction de l'heure UT

Soleil	6 h	8 h	10 h	12 h	14 h	16 h	18 h
h	18° 03'58	37° 37'79	55° 45'30	64° 12'27	54° 17'0"7	35° 48'20	16° 16'81
Z	75° 18'75	97° 27'69	128° 28'65	182° 55'54	235° 08'86	264° 45'03	286° 35'57

3. Heure t_m et hauteur h_m au méridien

– Au méridien, $AHL(t_m) = 0^{\circ} \rightarrow AHG(t_m) = G [360^{\circ}] = 357^{\circ},6625$

– Or, $AHG(t_m) = AHG(0) + Vt_m$, d'où : $t_m = \frac{G - AHG(0)}{V} = 11 \text{ h},9077$

$$t_m = 11 \text{ h } 54 \text{ min } 28 \text{ s}$$

– La hauteur h_m est donnée par la relation :

$$\sin h_m = \cos[L - D(t_m)], \text{ dans laquelle } D(t_m) = D(0) + dt_m$$

$$= 23^{\circ},0643 = 23^{\circ}\,3'\,51''$$

Ainsi

$$h_m = 64^{\circ}\,13'\,40''$$

– $AHL(t_m) = 0^{\circ} \rightarrow \operatorname{tg} Z_m = 0$ soit : $Z_m = 180^{\circ}$

4. Heures et azimuts au lever et au coucher

• Heures de lever t_l , de coucher t_c

– On part des relations, dans lesquelles on a fait apparaître le temps :

$$\sin h = \sin L \sin D(t) + \cos L \cos D(t) \cos \text{AHL}(t)$$

$$\text{AHL}(t) = \text{AHG}(0) + V t - G$$

$$D(t) = D(0) + dt$$

– Pour $h = 0$, il vient : $\cos \text{AHL}(t) = -\tan L \tan D(t)$, soit en détaillant :

$$\cos [\text{AHG}(0) + V t - G] = -\tan L \tan [D(0) + dt]$$

– Pour l'application numérique à la calculatrice, on utilise la méthode suivante :

→ On néglige dans un premier temps la variation dt de déclinaison ; ainsi :

$$\cos [\text{AHG}(0) + V t - G] = -\tan L \tan D(0) = -0,487\,853$$

	<i>lever</i>	<i>coucher</i>
$\text{AHG}(0) + V t - G =$	$240^\circ,8004$	$119^\circ,1996$
$t =$	$3\text{ h},9591$	$19\text{ h},8564$

→ On effectue une itération avec les déclinaisons calculées aux heures de lever et de coucher :

$D(0) + dt =$	$23^\circ,088$	$23^\circ,040$
$-\tan L \tan D(t) =$	$-0,487\,570$	$-0,486\,438$
$\text{AHG}(0) + V t - G =$	$240^\circ,8190$	$119^\circ,1067$
$t =$	$3\text{ h},9603$	$19\text{ h},8502$

Les heures du lever et du coucher sont :

$$t_l = 3\text{ h } 57\text{ min } 37\text{ s}$$

$$t_c = 19\text{ h } 51\text{ min } 1\text{ s}$$

➤ Remarques

1– Les heures ont été calculées en faisant abstraction de la **réfraction** d'angle $r_0 = 34'$; tenant compte de celle-ci, le cosinus de l'angle horaire local a comme nouvelle expression :

$$\cos \text{AHL} = \frac{-\sin r_0}{\cos L \cos D} - \tan L \tan D$$

On calcule alors :

	<i>lever</i>	<i>coucher</i>
terme correctif =	$-0,016\,335$	$-0,016\,329$
$\cos \text{AHL} =$	$-0,503\,905$	$-0,502\,767$
$\text{AHL} =$	$239^\circ,7413$	$120^\circ,1832$
$t =$	$3\text{ h},8885$	$19\text{ h},9220$

D'où :

$$t_l = 3\text{ h } 53\text{ min } 18\text{ s}$$

$$t_c = 19\text{ h } 55\text{ min } 19\text{ s}$$

2– Si on considère l'apparition du bord supérieur du Soleil, le lever aura lieu un peu plus tôt ; et si on considère la disparition du bord supérieur, le coucher aura lieu un peu plus tard.

Sachant que le diamètre apparent du Soleil a pour valeur $s = 32'$, on a cette fois :

$$\cos \text{AHL} = \frac{-\sin(r_0 + 0,5s)}{\cos L \cos D} - \text{tg } L \text{ tg } D \quad \text{et on calcule :}$$

	<i>lever</i>	<i>coucher</i>
terme correctif =	– 0,024 019	– 0,024 011
$\cos \text{AHL} =$	– 0,511 590	– 0,510 449
$\text{AHL} =$	239°,2302	120°,6937
$t =$	3 h,8544	19 h,9560

d'où : $t_l = 3 \text{ h } 51 \text{ min } 16 \text{ s}$ $t_c = 19 \text{ h } 57 \text{ min } 22 \text{ s}$

• Azimuts Z_l au lever et Z_c au coucher

Sachant que $h = 0$, on a : $\cos \hat{P} = \frac{\sin D(t)}{\cos L}$

→ Au *lever*, on calcule $\cos \hat{P} = 0,595\,773$ avec $Z = \hat{P}$
 puisque $180^\circ \leq \text{AHL} < 360$

Par conséquent : $Z_l = 53^\circ 25' 56''$ et $a_l = 233^\circ 25' 56''$ ($-126^\circ 34' 4''$)

→ Au *coucher*, on calcule $\cos \hat{P} = 0,594\,602$ avec $Z = 360^\circ - \hat{P}$
 puisque $0^\circ \leq \text{AHL} < 180$

Par conséquent : $Z_c = 306^\circ 29' 3''$ et $a_c = 126^\circ 29' 3''$

Les azimuts a au lever et au coucher ne sont pas parfaitement symétriques (à quelques minutes près !) ; ceci provient bien sûr de la légère évolution de la déclinaison.

➤ Remarque

Si on tient compte des deux corrections opérées ci-dessus, h n'est plus nul : la hauteur est en effet légèrement négative puisqu'elle vaut $-(r_0 + 0,5s)$.

Utilisant la relation donnant $\text{tg } Z$ pour calculer les azimuts au lever et au coucher, il vient :

→ Au *lever* $\text{tg } Z_l = +1,290\,658$ → $Z_l = +52^\circ,2315$

par conséquent : $Z_l = 52^\circ 13' 53''$ et $a_l = 232^\circ 13' 53''$ ($-127^\circ 46' 7''$)

→ Au *coucher* $\text{tg } Z_c = -1,294\,615$ → $Z_c = -52^\circ,3164 = 307^\circ,6836$

par conséquent : $Z_c = 307^\circ 41' 1''$ et $a_c = 127^\circ 41' 1''$

5. Heures et azimuts du lever et coucher pour certaines valeurs négatives de h

Un peu avant le lever ou un peu après le coucher du Soleil, la nuit n'est pas complète : c'est ce qu'on appelle le **crépuscule**. Suivant la valeur négative de la hauteur h , on distingue :

- $-6^\circ < h < -50'$ → crépuscule civil,
- $-12^\circ < h < -6^\circ$ → crépuscule nautique,
- $-18^\circ < h < -12^\circ$ → crépuscule astronomique.

Le tableau suivant donne, toujours pour la journée du 1^{er} juillet 2004, les heures et azimuts de lever et de coucher du Soleil pour les valeurs caractéristiques de h :

h	t_l	Z_l	t_c	Z_c
$-50'$	3 h 51 min 16 s	$52^\circ 13' 51''$	19 h 57 min 22 s	$307^\circ 41' 03''$
-6°	3 h 09 min 03 s	$44^\circ 00' 03''$	20 h 39 min 29 s	$315^\circ 53' 37''$
-12°	2 h 09 min 28 s	$31^\circ 32' 01''$	21 h 38 min 50 s	$328^\circ 18' 27''$
-18°	0 h 07 min 52 s	$3^\circ 17' 01''$	23 h 35 min 00 s	$355^\circ 14' 52''$



Les précisions des résultats fournis au cours de cet exercice sont un peu illusoires ; elles sont données dans le but de mieux suivre les étapes des calculs effectués sans approximation à l'aide d'un tableur.

Chapitre 10

Coordonnées équatoriales et écliptiques

Nous montrons comment l'observation des étoiles et des planètes a conduit naturellement à les positionner sur la voûte céleste par leurs coordonnées équatoriales, à savoir, la déclinaison et l'ascension verse ou droite mesurée à partir du point vernal par rapport auquel on sait situer dans le temps le méridien de Greenwich. En nous affranchissant un peu plus de la Terre, nous définirons le repère écliptique. Les relations de passage entre coordonnées équatoriales et écliptiques seront alors obtenues en considérant le triangle sphérique de sommets les pôles Nord céleste et écliptique, et l'astre. Enfin, il n'y a guère de problèmes de localisation dans un repère donné qui ne mette en jeu différentes expressions du temps ; aussi, la fin du chapitre sera-t-elle consacrée aux temps.

Finalement le passage entre coordonnées horizontales et horaires ou entre coordonnées équatoriales et écliptiques résulte d'une simple rotation des repères correspondants : rotation égale à la colatitute dans le premier cas et à l'obliquité dans le second. Les deux premiers exercices ont pour objectif de nous faire retrouver les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes à partir de la matrice rotation et de nous faciliter l'étude du dernier chapitre. Nous découvrirons aussi les effets du recul du point gamma.

Les deux autres exercices intéresseront plus particulièrement le navigateur et l'astronome. Ayant exprimé le temps sidéral d'une étoile, nous en déduirons l'heure locale au lever, au méridien, au coucher. Nous serons alors en mesure de déterminer les durées d'observation possibles des étoiles sélectionnées.

1 Voûte céleste

1.1 Constellations

Lorsque de l'hémisphère Nord on observe le ciel nocturne au voisinage de l'Étoile polaire, les constellations apparaissent tourner autour de celle-ci d'Est en Ouest, comme illustré sur la figure 10.1 :

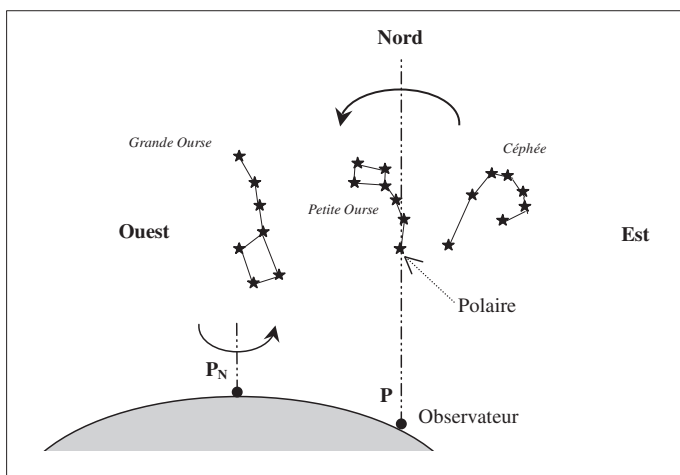


Figure 10.1 Rotation apparente de la voûte céleste.

Cette rotation, de sens inverse à celle de la Terre, s'effectue à la vitesse de $15^\circ/\text{h}$. Ainsi, en deux heures un angle de trente degrés est balayé ; ce qui correspond approximativement au déplacement angulaire de notre planète sur son orbite en un mois.

On en conclut que le ciel observé à une heure TU donnée est le même que celui observé :

- 2 heures plus tôt 1 mois après, ou
- 2 heures plus tard 1 mois avant.

On compense simplement la rotation et la révolution de la Terre qui ont lieu dans le même sens.

Du point d'observation P, à un instant donné, on ne voit que la moitié du ciel nocturne située au-dessus de l'horizon local ; à la même heure, de l'équateur, l'autre moitié sera vue six mois plus tard. L'ensemble du ciel visible est reporté sur la voûte céleste. Afin de situer plus facilement les étoiles, dès l'antiquité celles-ci ont été regroupées, selon leur position apparente, en un certain nombre d'ensembles appelés **constellations**.

Il y a 88 constellations, ou 89 si on dédouble celle du Serpent (la Tête du Serpent plus la Queue du Serpent).

Chacune a un nom en rapport parfois lointain avec sa forme apparente. Le nom des constellations est souvent tiré de la mythologie ; il y a toutefois un grand nombre de noms d'animaux.

Nom français	Nom latin	Abrév.
Cassiopeée	<i>Cassiopeia</i>	Cas
Persée	<i>Perseus</i>	Per
La Girafe	<i>Camelopardalis</i>	Cam
Le Lynx	<i>Lynx</i>	Lyn
La Grande Ourse	<i>Ursa Major</i>	UMa
La Petite Ourse	<i>Ursa Minor</i>	UMi
Le Dragon	<i>Draco</i>	Dra
Céphée	<i>Cepheus</i>	Cep

À ces appellations françaises correspondent plus officiellement les dénominations latines avec l'abréviation à trois lettres correspondante.

Quelques exemples dans la région du pôle Nord sont regroupés dans le tableau ci-dessus, en fonction des angles horaires croissants.

Chaque constellation occupe une surface sur la voûte céleste dont les contours ont été précisés en 1928, et sont constitués de portions de parallèles et de méridiens célestes dont la définition est donnée au paragraphe suivant.

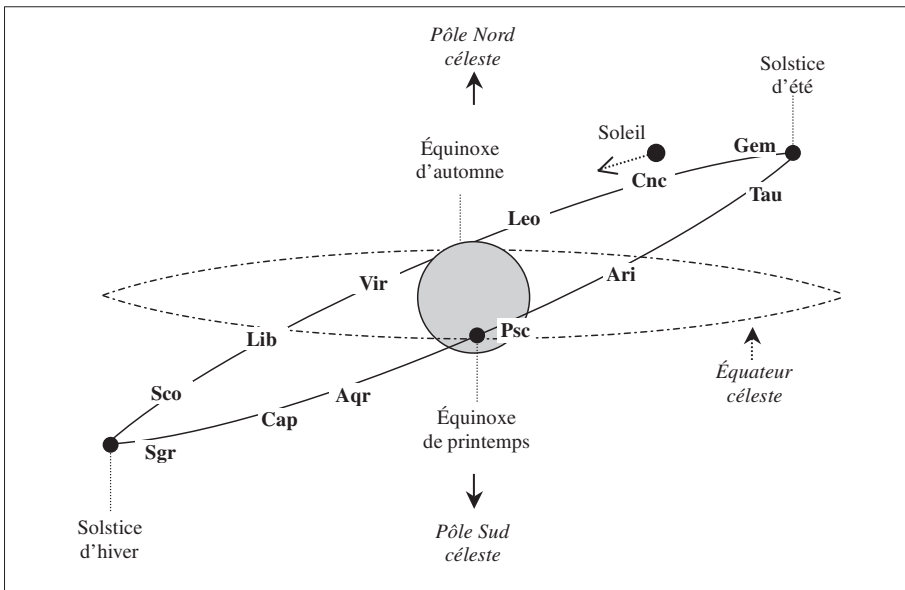


Figure 10.2 Constellations du zodiaque (abréviations conventionnelles à trois lettres).

Les 12 constellations traversées annuellement par le Soleil sont précisées à la figure 10.2 : ce sont celles du **zodiaque**. Le zodiaque est une bande de la sphère céleste centrée sur l'écliptique et d'une quinzaine de degrés en largeur, dans laquelle on observe les planètes et la Lune.

1.2 Magnitude

Une constellation représente donc une configuration apparente d'étoiles, telles qu'elles nous semblent positionnées sur la voûte céleste, donc abstraction faite du paramètre distance. Une autre grandeur a toutefois été introduite : c'est la **magnitude apparente** m , nombre caractérisant l'éclat, c'est-à-dire l'**intensité**, d'une étoile.

Plus un astre est brillant, plus sa magnitude est faible. Dans l'échelle de Pogson, pour un rapport d'intensité de 1 à 100, les magnitudes vont de 0 à 5. Le rapport q entre deux magnitudes consécutives étant constant, il vient :

$$q^5 = 100 \quad \text{d'où} \quad q = 10^{0.4} \approx 2,512$$

Les étoiles les plus brillantes peuvent avoir des magnitudes négatives, comme on peut le constater sur le tableau en 2.5. La notion de magnitude est également appliquée aux planètes : ainsi, celle de Mars varie entre $-2,6$ (position la plus proche de la Terre) et $+2,0$; celle d'Uranus entre $+5,65$ et $+6,07$.

Notons que pour bien comparer les **luminosités** des étoiles, les magnitudes doivent être recalculées en considérant des éloignements identiques : la **magnitude absolue** M est ainsi calculée en supposant toutes les étoiles à 10 pc (parsecs) de la Terre.

1.3 Nom des étoiles

Beaucoup d'étoiles ont un nom propre, en particulier les plus brillantes ou remarquables comme Sirius, Arcturus, Véga, Altaïr ou Deneb. Le besoin s'est très tôt fait sentir d'utiliser une dénomination plus rationnelle.

Dès 1603, l'astronome allemand Johann Bayer proposa la nomenclature suivante :

Les étoiles de chaque constellation sont désignées par une lettre de l'alphabet grec, α puis β , γ , δ , ϵ ... en fonction de leur intensité décroissante (il peut toutefois y avoir quelques exceptions !). Par exemple, Alpha de la Petite Ourse (α UMi) désigne la Polaire (Polaris), Bêta de la Grande Ourse (β UMa) désigne l'étoile Méraïk, Delta d'Orion (δ Ori) désigne l'étoile Mintaka.

1.4 Catalogues des étoiles et objets non stellaires

En ce qui concerne les étoiles, le premier catalogue ayant traversé les siècles est celui de Ptolémée avec 1022 astres. Au ^{xvii}^e siècle, les Anglais Edmond Halley (1656-1742) et John Flamsteed (1646-1719) établirent des inventaires donnant des positions assez précises ; Flamsteed y attribue un nombre aux étoiles en fonction de l'ascension droite croissante.

Le **catalogue FK4** des Allemands W. Fricke et A. Kopff, sorti en 1963 après révision du FK3, a été remplacé récemment par le FK5. Tous deux contiennent le même nombre d'étoiles (1535) positionnées en ascension droite et déclinaison (voir paragraphe suivant) par rapport à l'équinoxe et au plan équatorial définis en J2000 pour le FK5.

Relativement aux objets non stellaires, on mentionnera :

- Le catalogue de Charles Messier (1730-1817), qui comporte 110 nébuleuses ou amas stellaires repérés par un numéro précédé de la lettre M.
- Les trois catalogues de William Herschel (1738-1822), regroupant environ 2500 nébuleuses.
- Le *New General Catalogue* (NGC) sorti en 1888, où J. L. E. Dreyer, directeur de l'observatoire d'Armagh en Irlande, y reporte initialement 7840 objets ; 5836 autres y seront ensuite intégrés dans l'*Index Catalogue* (IC).
- Des catalogues spécifiques comme ceux de Cambridge pour les radio-sources.

2 Coordonnées équatoriales

2.1 Repère lié à la sphère céleste

La **sphère céleste** est une sphère fictive sur laquelle sont projetés les astres observés depuis la Terre. Vue de l'intérieur, elle est appelée voûte céleste.

Elle a pour centre le centre de la Terre. Son axe de rotation, appelé **axe du monde** est confondu avec celui de notre planète ; il coupe la sphère au pôle Nord céleste et au pôle Sud céleste.

L'intersection avec le plan équatorial terrestre est l'**équateur céleste** qui partage la voûte céleste en deux hémisphères : l'hémisphère Nord céleste ou **boréal** et l'hémisphère Sud céleste ou **austral**.

L'équateur céleste est un grand cercle ; les plans parallèles au plan équatorial découpent des parallèles. On définit également des **méridiens célestes**.

L'intersection de l'équateur céleste avec le plan de l'écliptique donne deux points ; celui correspondant à la position du Soleil à l'équinoxe du printemps est le point γ ou « premier point du Bélier », le point opposé est le point γ' . La droite $\{\gamma' \gamma\}$ est l'**axe des équinoxes**.

Le point gamma, aussi dénommé point vernal, est de fait dans la constellation des Poissons.

Deux coordonnées angulaires permettent de positionner tout objet céleste dans un repère lié au référentiel de la sphère céleste. Le premier angle sera défini par rapport au plan de l'équateur céleste (confondu avec l'équateur terrestre) ; le deuxième angle sera mesuré dans le plan précédant à partir de l'axe des équinoxes.

La figure 10.3 donne les coordonnées équatoriales de deux étoiles dans un tel repère :

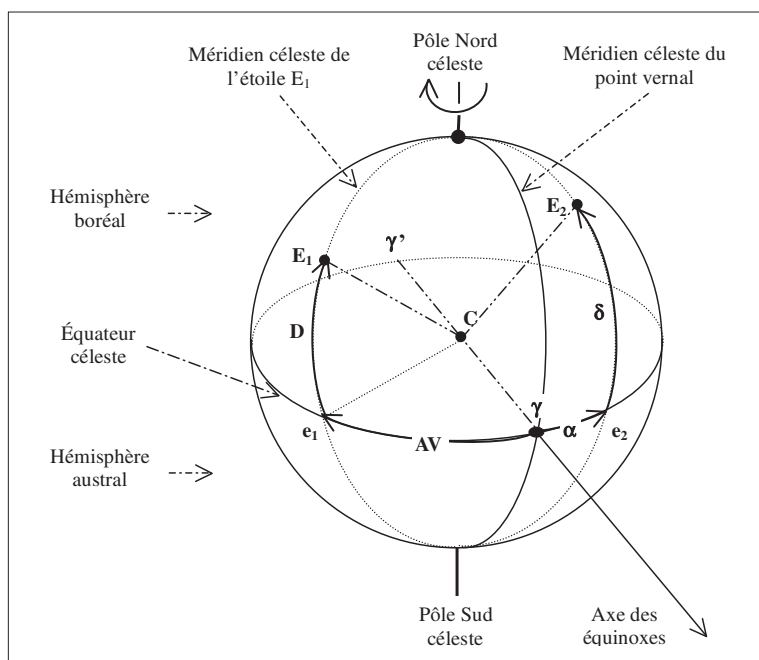


Figure 10.3 Déclinaisons et ascensions dans le repère céleste.

2.2 Déclinaison

Elle correspond à la latitude d'un point P de la Terre en coordonnées géographiques.

C'est l'angle **D** de la ligne de visée de l'étoile, menée du centre C de la sphère, avec l'équateur céleste : la définition est identique à celle donnée pour les coordonnées horaires au chapitre 9. La déclinaison est positive, de 0° à $+90^\circ$, vers le pôle Nord céleste ; négative, de 0° à -90° , vers le pôle Sud céleste. La déclinaison est aussi notée δ par les astronomes.

2.3 Ascensions verse et droite

La deuxième coordonnée angulaire est l'angle entre la ligne des équinoxes et la projection sur l'équateur céleste de la droite de visée de l'étoile E observée ; e désignant le point d'intersection du méridien de l'étoile avec l'équateur céleste, l'angle à considérer est l'angle $(C\gamma, Ce)$. Deux définitions vont coexister suivant le sens positif adopté :

- Lorsque l'angle est compté positivement vers l'Ouest à partir du point γ , c'est-à-dire dans le sens rétrograde, on l'appelle **ascension verse**. L'ascension verse est notée **AV** et varie donc de 0° à 360° . Si l'astre est par exemple une étoile, on pourra noter AV_e ou AV_* .

Ainsi, pour le mois m de l'année n, les étoiles Véga et Sirius ont pour coordonnées :

$$\begin{array}{ll} AV_{\text{Véga}} = 080^\circ 46' 36'' & D_{\text{Véga}} = + 38^\circ 46' 48'' \\ AV_{\text{Sirius}} = 258^\circ 44' 12'' & D_{\text{Sirius}} = - 16^\circ 43' 06'' \end{array}$$

L'ascension verse est aussi appelée **angle horaire sidéral** (en anglais, *Sideral Hour Angle*) et peut être notée AHS.

- Lorsque l'angle est compté positivement vers l'Est à partir du point γ , c'est-à-dire dans le sens direct, il est nommé **ascension droite**. L'ascension droite, principalement utilisée par les astronomes, est notée **AD** ou α et varie également de 0° à 360° .

Ascensions droite et verse sont donc liées par la relation :

$$\alpha = 360^\circ - AV$$

Les coordonnées de Véga et Sirius deviennent :

$$\begin{array}{ll} \alpha_{\text{Véga}} = 279^\circ 13' 24'' & \delta_{\text{Véga}} = + 38^\circ 46' 48'' \\ \alpha_{\text{Sirius}} = 101^\circ 15' 48'' & \delta_{\text{Sirius}} = - 16^\circ 43' 06'' \end{array}$$

La sphère céleste effectuant une rotation complète en 24 heures sidérales (voir paragraphe 4), on en déduit les correspondances suivantes :

- angles -		- durées -
15°	↔	1 h
1°	↔	4 min
15'	↔	1 min
1'	↔	4 s
15''	↔	1 s
1''	↔	1/15 s

et les coordonnées des deux étoiles sont alors :

$$\begin{array}{ll} \alpha_{\text{Véga}} = 18 \text{ h } 36 \text{ min } 53,6 \text{ s} & \delta_{\text{Véga}} = + 38^\circ 46' 48'', \\ \alpha_{\text{Sirius}} = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 3,2 \text{ s} & \delta_{\text{Sirius}} = - 16^\circ 43' 06''. \end{array}$$

2.4 Passerelle avec les coordonnées horaires

• Tout comme pour un astre, la position du point vernal, désigné par γ ou S, est donnée par rapport au méridien origine de Greenwich.

Son angle horaire origine est noté $AHG\gamma$, ou AH_{so} dans les éphémérides ; il est aussi appelé **temps sidéral**.

On notera T_0 le temps sidéral à Greenwich à 0 heure UT :

$$T_0 = AHG\gamma(0)$$

L'angle horaire local est noté $AHL\gamma$, ou AH_{sg} (méridien local de longitude G).

Il porte également le nom de **temps sidéral local** souvent désigné par **T**.

On rappelle la relation :

$$AHL\gamma = AHG\gamma - G$$

Ainsi, se référant à deux points P et P' de longitudes G et G', on déduit la relation :

$$AHL'\gamma + G' = AHL\gamma + G$$

indépendante de la latitude des deux points.

Le déplacement relatif d'Est en Ouest du point vernal s'effectue à vitesse constante. Sa variation horaire $V\gamma$ est égale à 360° divisés par la durée du jour sidéral qui vaut 86 164,0956 s soit 23 h,934 471 ; d'où :

$$V\gamma = 15^\circ,041\,068 /h$$

Ainsi :

$$AHG\gamma(t) = AHG\gamma(0) + V\gamma t$$

Rappelons que du fait du mouvement de précession des équinoxes (voir chapitre 1), le point vernal dérive vers l'Ouest de $50'',27$, soit $0^\circ,013\,965$ par an.

• Nous sommes maintenant en mesure de passer de l'ascension verse AV_e (ou droite α_e) d'une étoile à son angle horaire local AHL_e ; on applique la relation de Chasles sur les angles :

AH de l'étoile / méridien local =

AH de l'étoile / méridien céleste du point γ + AH du point γ / méridien de Greenwich + Angle méridien de Greenwich / méridien local ;

soit en utilisant les notations correspondantes :

$$AHL_e = AV_e + AHG\gamma - G$$

avec :

$$AHG_e = AV_e + AHG\gamma \quad (AV_e \text{ est aussi noté } AHS_e).$$

On déduit aussi :

$$AHL_e = AV_e + AHL\gamma$$

L'angle horaire origine d'un astre est aussi noté AH_o , et celui d'une étoile AH_{*o} . Pour l'angle horaire local, les notations sont respectivement AH_g et AH_{*g} .

• Des formules ci-dessus, on déduit par exemple l'heure de passage t_m d'une étoile au méridien.

Au méridien, $AHL_e(t_m) = 0$

D'où on déduit : $AHG\gamma(t_m) = AHG\gamma(0) + V\gamma t_m = G - AV_e$

Ainsi :

$$t_m = \frac{G - AV_e - AHG\gamma(0)}{V\gamma}$$

Par exemple, le 1^{er} juillet 2004 à Paris, pour Arcturus, les données sont :

$$G = -2^\circ 20' 15'' \quad \alpha = 14 \text{ h } 15 \text{ min } 52 \text{ s} \quad T_0 = 18 \text{ h } 37 \text{ min } 32 \text{ s}$$

et on trouve $t_m = 19 \text{ h } 25 \text{ min } 47 \text{ s}$

(Résultat en cohérence avec ceux des exercices E10-3 et E10-4).

2.5 Coordonnées de quelques étoiles

Pour clore ce paragraphe, on donne dans le tableau qui suit, les coordonnées au 1^{er} juillet 2004, ainsi que la magnitude apparente des 16 plus brillantes étoiles vues depuis l'Europe.

ÉTOILE				POSITION			
nom usuel	Constellation	nom codifié	magnitude m	ascension			déclinaison
				droite α			δ
				h	min	s	° ' "
Sirius	Grand chien	α CMa	-1,4	6	45	20,8	258 39 48 -16 43 21
Arcturus	Bouvier	α Boo	-0,1	14	15	52,0	146 02 00 +19 9 33
Véga	Lyre	α Lyr	0,0	18	37	5,5	80 43 38 +38 47 17
Capella	Cocher	α Aur	0,1	5	17	1,3	280 44 41 +46 0 8
Rigel	Orion	β Ori	0,2	5	14	45,3	281 18 41 - 8 11 48
Procyon	Petit chien	α CMi	0,4	7	39	32,2	245 06 57 + 5 12 48
Bételgeuse	Orion	α Ori	0,5	5	55	24,9	271 08 47 + 7 24 27
Altair	Aigle	α Aql	0,8	19	51	0,2	62 14 57 + 8 52 50
Aldébaran	Taureau	α Tau	0,9	4	36	10,8	290 57 18 +16 31 5
Spica	Vierge	α Vir	1,0	13	25	25,8	158 38 33 -11 11 5
Antarès	Scorpion	α Sco	1,1	16	29	41,0	112 34 45 -26 26 30
Pollux	Gémeaux	β Gem	1,2	7	45	35,4	243 36 09 +28 0 54
Deneb	Cygne	α Cyg	1,2	20	41	35,1	49 36 14 +45 17 48
Fomalhaut	Pois. austral	α PsA	1,2	22	57	53,9	15 31 32 -29 35 54
Régulus	Lion	α Leo	1,4	10	8	36,7	207 50 50 +11 56 42
Castor	Gémeaux	α Gem	1,6	7	34	53,0	246 16 45 +31 52 41

Ces étoiles sont reportées sur la carte du ciel de la figure 10.4. Le Soleil y est également représenté en certains points de l'écliptique. Ses positions sont données à l'équinoxe de printemps (EP), au solstice d'été (SE), à l'équinoxe d'automne (EA) et au solstice d'hiver (SH) ; ainsi que le 21 de chaque mois intermédiaire pour l'années 2004.

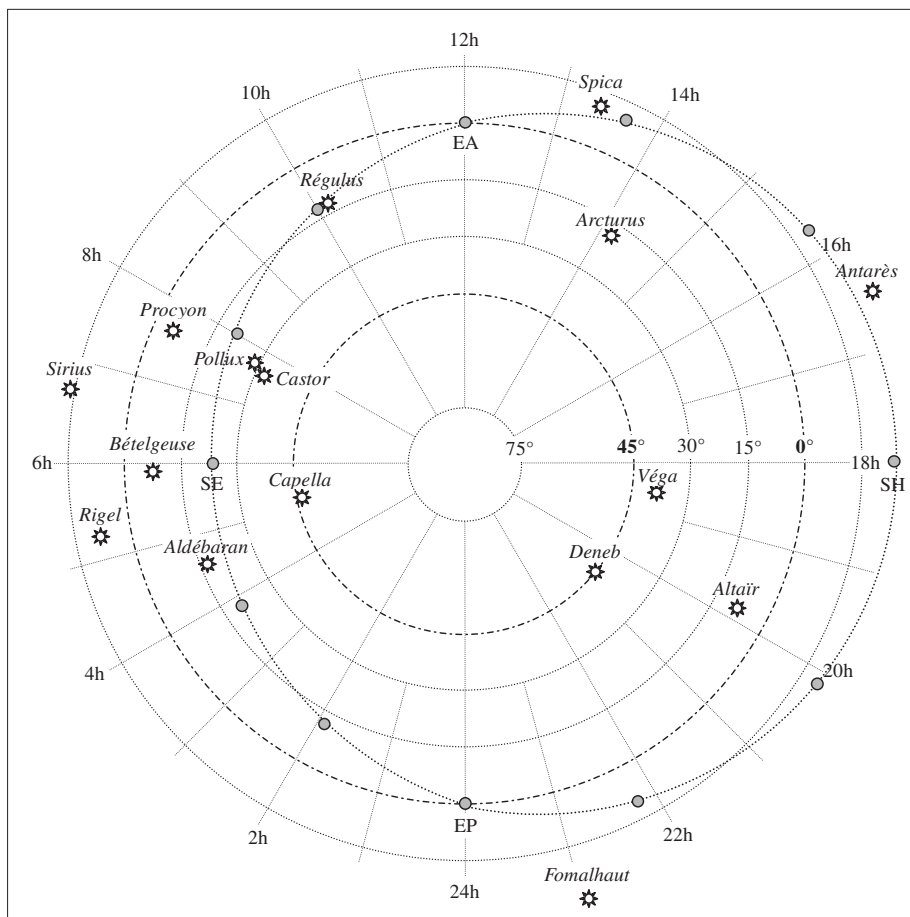


Figure 10.4 Position sur la carte céleste des étoiles les plus brillantes et du Soleil évoluant sur l'écliptique.

3 Coordonnées écliptiques

3.1 Repère, latitude b et longitude l

Le Soleil décrit sur la sphère céleste, ou sphère des fixes, un grand cercle : l'écliptique, qu'il parcourt dans le sens direct vu du pôle Nord céleste (c'est-à-dire d'Ouest en Est *sur* la sphère).

L'écliptique coupe l'équateur céleste en γ' et γ , le point gamma étant « franchi » par le Soleil avec une déclinaison croissant de valeurs négatives à positives.

L'angle du plan de l'écliptique avec celui de l'équateur est l'**obliquité** ε (voir chapitre 1) qui vaut environ $23^\circ 26' 21''$. La normale en C, centre de la sphère, au plan de l'écliptique est l'axe des **pôles écliptiques** qui coupe la sphère au pôle Nord écliptique (point Q_N) et au pôle Sud écliptique (point Q_S). Ainsi l'angle des axes $P_S P_N$ et $Q_S Q_N$ des pôles céleste et écliptique correspond par conséquent à l'obliquité.

Muni d'un tel repère on définit :

- la **latitude écliptique** b (ou β)

C'est l'angle de la ligne de visée de l'astre menée du centre de la sphère avec le plan de l'écliptique. Il est compté de 0° à $+90^\circ$ vers le pôle Nord écliptique et de 0° à -90° vers le pôle Sud.

- la **longitude écliptique** l (ou λ)

C'est l'angle de la ligne des équinoxes avec la projection sur le plan de l'écliptique de la ligne de visée ; il est compté de 0° à $+360^\circ$ dans le sens direct.

La figure 10.5 représente le repère et les coordonnées écliptiques :

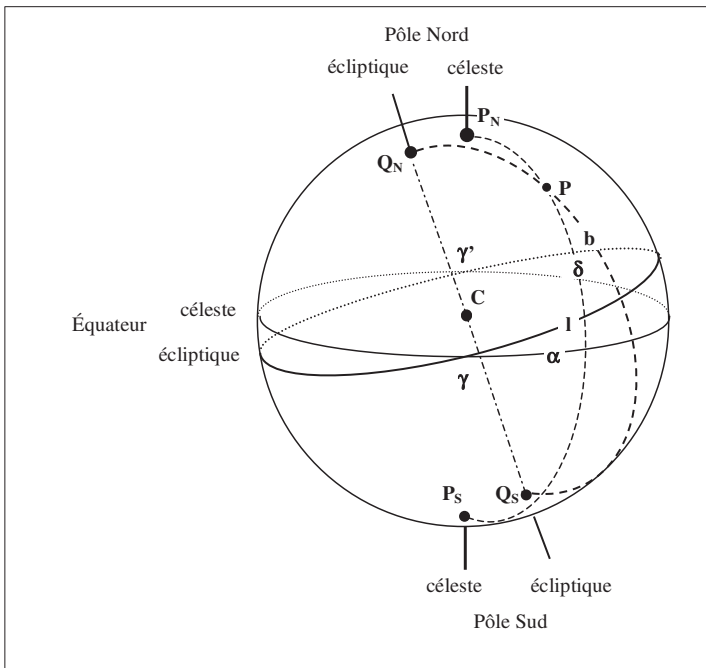


Figure 10.5 Coordonnées écliptiques (l , b) et équatoriales (α , δ).

3.2 Relations de passage entre coordonnées écliptiques et équatoriales

On va établir ces relations en considérant le triangle sphérique $P_N Q_N P$ de la figure 10.5 ci-dessus, que nous représentons à la figure 10.6 en faisant apparaître les éléments connus :

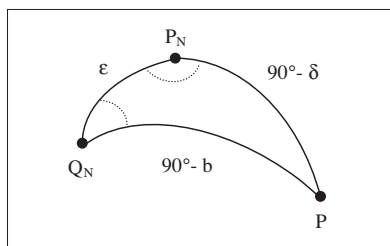


Figure 10.6 Triangle sphérique reliant les coordonnées équatoriales et écliptiques.

Angles au sommet :

On notera en préliminaire que l'axe $\gamma'\gamma$ des équinoxes est perpendiculaire aux axes des pôles, d'où :

$$\hat{P}_N = \frac{\pi}{2} + \alpha \text{ (angle entre le méridien céleste passant par } Q_N \text{ et celui passant par } P).$$

$$\hat{Q}_N = \frac{\pi}{2} - l \text{ (angle entre les demi-cercles } Q_N P_N Q_S \text{ et } Q_N P_N P_S).$$

■ Coordonnées équatoriales (α, δ) à écliptiques (l, b)

Considérant le groupe de Gauss, on effectue la correspondance :

$$A \rightarrow P_N \quad B \rightarrow Q_N \quad C \rightarrow P$$

$$\text{D'où :} \quad a \rightarrow \frac{\pi}{2} - b \quad b \rightarrow \frac{\pi}{2} - \delta \quad c \rightarrow \varepsilon$$

Les trois formules de Gauss deviennent :

$$\sin b = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha$$

$$\cos b \cos l = \cos \delta \cos \alpha$$

$$\cos b \sin l = \sin \varepsilon \sin \delta + \cos \varepsilon \cos \delta \sin \alpha$$

La tangente de la longitude a pour expression :

$$\operatorname{tg} l = \frac{\cos \varepsilon \sin \alpha + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta}{\cos \alpha}$$

■ Coordonnées écliptiques (l, b) à équatoriales (α, δ)

Cette fois, on effectue la correspondance :

$$A \rightarrow Q_N \quad B \rightarrow P_N \quad C \rightarrow P$$

$$\text{D'où :} \quad a \rightarrow \frac{\pi}{2} - \delta \quad b \rightarrow \frac{\pi}{2} - b \quad c \rightarrow \varepsilon$$

On obtient les relations :

$$\sin \delta = \cos \varepsilon \sin b + \sin \varepsilon \cos b \sin l$$

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos b \cos l$$

$$\cos \delta \sin \alpha = -\sin \varepsilon \sin b + \cos \varepsilon \cos b \sin l$$

La tangente de l'ascension droite a pour expression :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varepsilon \sin l - \sin \varepsilon \operatorname{tg} b}{\cos l}$$



Cas du Soleil

Sa latitude écliptique b_s étant nulle, sa déclinaison et son ascension droite s'expriment simplement en fonction de sa longitude écliptique l_s :

$$\sin \delta_s = \sin \varepsilon \sin l_s$$

$$\operatorname{tg} \alpha_s = \cos \varepsilon \operatorname{tg} l_s$$

D'autre part, puisque $\sin b_s = 0$, on obtient directement la relation entre coordonnées équatoriales :

$$\operatorname{tg} \delta_s = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha_s$$

4 Temps

4.1 Temps dérivés du temps solaire

Ces temps sont basés sur la rotation de notre planète, c'est-à-dire, pour l'observateur terrestre, sur le mouvement journalier du Soleil.

■ Temps solaire vrai local

C'est l'angle horaire local du centre du Soleil noté AHL_s ou $AHvg$ ou H_s . Exprimé en heures minutes et secondes il correspond au **temps vrai** t_v , affecté de toutes les irrégularités du système Terre-Soleil, et que trois millénaires avant J.-C. les Égyptiens mesuraient déjà avec leurs cadrans solaires.

Précisons que : $AHL_s = -\alpha + AHL_\gamma$

soit en simplifiant les notations : $H = -\alpha + T$

α est l'ascension droite vraie du Soleil.

■ Temps solaire moyen

Le besoin d'une échelle de temps uniforme s'est concrétisé au XVII^e siècle grâce à l'apparition des horloges mécaniques qui furent rapidement dotées d'une aiguille des minutes alors que parallèlement la précision était améliorée par l'introduction des systèmes à ressort spiral. Le temps ainsi mesuré devint le **temps moyen** t_m , s'écartant du temps vrai de la quantité E :

$$t_m = t_v + E$$

Ce temps solaire moyen correspond à un angle horaire local moyen H_m tel que :

$$H_m = -\alpha_m + T$$

α_m représentant la partie linéaire de l'ascension droite.

■ Équation du temps

La correction à apporter au temps vrai pour atteindre le temps moyen est appelée **équation du temps** E . Elle satisfait aux égalités :

$$E = t_m - t_v = H_m - H = \alpha - \alpha_m$$

Notons que pour d'autres pays, l'équation du temps peut correspondre à la différence $t_v - t_m$.

Nombres d'expressions plus ou moins précises de cette équation font apparaître explicitement deux termes principaux :

- l'*équation du centre* C de période un an, due à l'excentricité e de l'orbite terrestre ;
- la *réduction à l'équateur* R de période six mois, due à l'obliquité ε de l'écliptique sur l'équateur.

Fondamentalement, l'équation du temps correspond à la partie non linéaire de l'ascension droite α du Soleil. Pour cet astre, on a établi au paragraphe précédent que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{tg} l$$

l étant la longitude écliptique du Soleil égale, à une constante près, à l'anomalie vraie θ de son mouvement elliptique apparent autour de la Terre :

$$l = \varpi + 180^\circ + \theta$$

Nous verrons au chapitre suivant que la constante ϖ est la longitude du péri-centre de la Terre ; ainsi, au premier janvier 2000 :

$$\varpi = 102^\circ 56' 14'',45$$

D'autre part, nous savons exprimer θ en fonction de l'anomalie moyenne M de notre planète ; cette anomalie a , au premier ordre en t , pour expression :

$$M = -2^{\circ},470\,891\,250 + 359^{\circ},990\,502\,911 \times t$$

$$\text{avec} \quad t = (\text{DJ} - 2\,451\,545) / 365,25$$

(voir également au prochain chapitre, on notera en particulier que $t = 1000\tau$). Les éléments ci-dessus permettent d'atteindre α et donc d'en extraire E ...

L'Annuaire du bureau des longitudes (voir bibliographie) donne une expression en minutes de l'équation du temps, valable de 1900 à 2100, que nous reproduisons ci-dessous :

$$\begin{aligned} E_m = & 7,362 \sin M - 0,144 \cos M + 8,955 \sin 2M + 4,302 \cos 2M \\ & + 0,288 \sin 3M + 0,133 \cos 3M + 0,131 \sin 4M + 0,167 \cos 4M \\ & + 0,009 \sin 5M + 0,011 \cos 5M + 0,001 \sin 6M + 0,006 \cos 6M \\ & - 0,00258 t \sin 2M + 0,00533 t \cos 2M \end{aligned}$$

L'équation du temps, calculée pour l'année 2010, est représentée à la fin de ce chapitre. La courbe est tracée à partir du 1^{er} janvier 2010 à 0 h ; ce qui correspond à :

$$\text{DJ} = 2\,455\,197,5 \text{ JJ} \quad \text{d'où} \quad t = 10 \text{ ans}$$

On vérifie que l'équation $E_m(t)$ s'annule quatre fois dans l'année et que son amplitude peut atteindre 16 minutes ; les fortes valeurs positives étant obtenues vers mi février, les négatives vers fin octobre - début novembre.

D'une année sur l'autre, l'allure de la courbe et les caractéristiques précédentes sont conservées.

■ Temps civil

Il est midi vrai lorsque le Soleil passe au méridien du lieu. À cet instant : $t_v = 0$ et $t_m = E$.

Il est midi moyen lorsque $t_m = 0$, soit : $t_v = -E$; par exemple, en février il faudra attendre plusieurs minutes avant que le Soleil ne soit au méridien.

Il fut décidé de décaler de 12 heures le temps moyen afin d'éviter le désagrément du changement de date en milieu de journée induit par la périodicité de 24 heures. Le **temps civil** t_c est donc défini comme suit :

$$t_c = t_m + 12$$

Le temps civil correspondant au passage physique du Soleil au méridien de Greenwich est souvent appelé **T.Pass** dans les éphémérides destinées aux navigateurs.

■ Temps universels et fuseaux horaires

- Le temps civil au méridien de Greenwich est le **Temps Universel** TU ou **UT** pour *Universal Time*, l'utilisation du seul sigle anglo-saxon étant recommandée.

En un point de longitude G , exprimée en h, min, s, la relation entre le temps civil local et l'heure UT est :

$$UT = t_c(\text{local}) + G$$

Ce temps universel n'est cependant uniforme qu'en première approximation ; en effet, le temps moyen dont il est issu devrait pour refléter l'uniformité des meilleures horloges tenir compte de différentes autres perturbations dont par exemple le ralentissement de la rotation de notre planète.

D'autre part, fondamentalement lié à la rotation de la Terre, il dépend de la position de l'axe des pôles ; or le pôle instantané de rotation est doué de mouvements peu prévisibles. L'axe de rotation retenu pour la publication du temps universel **UT1** correspond au pôle céleste des éphémérides.

- Le globe terrestre a été divisé en 24 **fuseaux horaires** de 15° chacun. Le premier, le fuseau $n^\circ 0$, est centré sur le méridien origine ; l'incrémentación se fait vers l'Est jusqu'à $+23$:

Lorsqu'il est 12 h UT à Londres, il est : 22 h UT à Sydney (UT + 10)

9 h UT à Rio de Janeiro (UT - 3).

La ligne de changement de date s'écarte du centre du fuseau $n^\circ 12$ pour tenir compte de la géographie des lieux.

■ *Temps légal*

Des nations appliquent certains décalages en nombres entiers d'heures par rapport au temps universel. En France, l'**heure légale** t_l satisfait à :

$$t_l = UT + 1 \quad \text{pour l'heure d'hiver ;}$$

$$t_l = UT + 2 \quad \text{pour l'heure d'été.}$$

En 2004, l'heure d'été débute le dimanche 28 mars à 2 h du matin et s'achève le dimanche 31 octobre à 3 h du matin. En 2005 les jours du changement tombent respectivement le 27 mars et le 30 octobre (dernier dimanche du mois à la même heure).

4.2 Temps des éphémérides et temps atomique international

Le premier est basé sur la durée de révolution de notre planète autour du Soleil ; le deuxième sur les propriétés radiatives de l'atome. Tous deux visaient, à des époques différentes, à une meilleure uniformité du temps mesuré.

■ *Temps des éphémérides*

Concurremment au temps moyen, basé sur la rotation terrestre corrigée de ses imperfections, on a défini un temps basé sur la durée de la révolution de notre planète et que l'on espérait être d'une meilleure uniformité. Le problème est

que la référence du point vernal n'est pas figée, à cause essentiellement de la précession. On a vu au chapitre 1 que cela amenait à définir deux années : l'année sidérale, où le point γ était considéré comme fixe, et l'année tropique, plus courte de 0,0142 jour, qui tenait compte de la précession.

Le déplacement du point γ impliquait de choisir une année précise pour définir un temps lié à la rotation de la Terre. Ainsi, la seconde du **temps des éphémérides TE** est-elle définie à partir de la durée de l'année tropique 1900 comme suit :

$$1\text{s TE} = \frac{\text{durée année tropique 1900}}{31556925,9747}$$

On notera que le temps terrestre « TT » est confondu avec le TE.

■ *Temps atomique international*

La seconde du **Temps Atomique International, TAI**, a été prise égale à celle du TE ; elle correspond en conséquence à la durée d'un nombre précis de périodes de la radiation de transition entre les deux niveaux hyper fins de l'atome de césium 133 dans l'état fondamental (voir définition de « seconde » au chapitre 1, paragraphe 2).

L'accumulation des secondes conduit au TAI ; cette opération s'effectue en s'appuyant sur tout un réseau d'horloges au césium, ce qui permet d'accroître la fiabilité et la précision.

Il s'avère que le TE et le TAI sont des temps uniformes ; malheureusement, ils diffèrent d'une constante :

$$\text{TE} = \text{TAI} + 32,184 \text{ s}$$

■ *Temps universel coordonné*

Le TAI étant d'une régularité et d'une précision remarquables, on a cherché à lui « accrocher » le temps universel. Pour cela, on a créé un temps uniforme sur un certain laps de temps : le **temps universel coordonné, UTC**, selon le sigle anglo-saxon de *Universal Time Coordinated*.

Ce temps satisfait en permanence aux deux relations :

$$\text{UTC} = \text{TAI} - n \text{ secondes}$$

et

$$\text{UT1} - \text{UTC} \leq 0,9 \text{ s}$$

Afin de répondre à ces contraintes, UTC est diminué d'une seconde environ tous les 1 à 2 ans.

L'heure UTC est déduite des équations ci-dessus depuis le 1^{er} janvier 1972, et le temps universel coordonné est l'*échelle de temps légale* depuis 1978. Il est diffusé par le réseau des satellites GPS et est accessible en permanence avec une précision de 1 μ s. L'UTC, aux décalages horaires près, est également transmis par horloges parlantes et stations de radiodiffusion, et des émetteurs peuvent automatiquement recalibrer les horloges munies de récepteurs appropriés.

Si on ne cherche pas une précision meilleure que la seconde, il y a alors équivalence entre UTC et UT1.

D'autre part, le lien avec le temps des éphémérides s'exprime par l'égalité :

$$TE = UTC + n + 32,184 \text{ s}$$

Pour l'année 2000, $n = 32$.

4.3 Temps sidéral

On a établi au paragraphe 2 de ce chapitre, la relation suivante, valable pour tout astre :

$$AHL = AV + AHL\gamma$$

que l'on note plus simplement :

$$H = -\alpha + T$$

L'angle horaire local de γ mesure la rotation sidérale qui par définition s'effectue en *24 heures sidérales*. On a vu que cette rotation complète de la Terre ne s'effectue en réalité qu'en 23 h 56 min 4 s.

Lorsque l'astre est au méridien, $\alpha = T$

Son ascension droite est alors égale au temps sidéral.

Pour être en mesure d'observer un astre donné, il apparaît donc essentiel d'établir la correspondance entre le **temps sidéral local**, « **T** », et le temps légal t_l . À cette fin, les éphémérides donnent le *temps sidéral de Greenwich*, T_0 , c'est-à-dire l'angle horaire de γ par rapport au méridien origine à 0 h UTC, pour tous les jours de l'année.



La démarche permettant de passer de t_l à T est détaillée ci-dessous :

- On recherche T_0 pour la date donnée.
- On passe, en France, de t_l à UT en retranchant 1 ou 2 heures.
- On convertit UT en temps sidéral ΔT ; sachant que la différence entre le jour sidéral de durée 86 164,1 s et le jour moyen de durée 86 400 s est de 235,9 secondes (l'année comportant 366,2564 jours sidéraux) ; il vient :

$$\Delta T = UT - T_0 + UT \times (235,9 / 86164,1)$$

soit, plus rigoureusement :

$$\Delta T = UT \times 1,002\,737\,91$$

- On déduit le temps sidéral à Greenwich à l'instant donné, soit $T_0 + \Delta T$.
- Le temps sidéral à l'instant donné t_1 et au lieu considéré de longitude G est finalement :

$$T = T_0 + \Delta T - G$$



Inversement le passage de T à t_1 s'effectue comme suit :

- On recherche T_0 à la date considérée.
- On calcule le temps sidéral à Greenwich $T + G$.
- On calcule l'accroissement par rapport à T_0 , soit $\Delta T = T + G - T_0$.
- On fait la conversion en temps universel :

$$UT = \Delta T \times 0,997\,269\,56$$

- En France, le temps légal sera :

$$t_1 = (T + G - T_0) \times 0,997\,269\,56 + 1 \quad (\text{heure d'hiver}) \\ + 2 \quad (\text{heure d'été})$$

Pour clore ce paragraphe, on donne à titre d'exemple le temps sidéral de Greenwich à 0 h UTC, soit T_0 , au premier de chaque mois de l'année 2004:

mois	T_0	mois	T_0	mois	T_0
Janvier	6 h 39 min 59 s	Mai	14 h 37 min 02 s	Septembre	22 h 41 min 59 s
Février	8 h 42 min 12 s	Juin	16 h 39 min 15 s	Octobre	0 h 40 min 15 s
Mars	10 h 36 min 32 s	Juillet	18 h 37 min 32 s	Novembre	2 h 42 min 28 s
Avril	12 h 38 min 45 s	Août	20 h 39 min 45 s	Décembre	4 h 40 min 45 s

Toujours en 2004, on a calculé ci-dessous le temps sidéral moyen à Greenwich, correspondant aux dates et heures de changement de saison :

Événement	date	heure UTC	temps sidéral moyen
Équinoxe de Printemps	20 mars	6 h 49 min	11 h 52 min 34 s
Solstice d'été	21 juin	0 h 57 min	17 h 58 min 16 s
Équinoxe d'Automne	22 septembre	16 h 30 min	0 h 07 min 29 s
Solstice d'hiver	21 décembre	12 h 42 min	6 h 01 min 41 s

Ce temps sidéral moyen peut se calculer à l'aide de la formule du **Temps Sidéral Moyen de Greenwich** (GMST) que nous reproduisons ci-dessous (*):

$$\text{GMST} = 6 \text{ h } 41 \text{ min } 50 \text{ s},548 \, 41 + 8 \, 640 \, 184 \text{ s},812 \, 866 \, \tau + 0 \text{ s},093 \, 104 \, \tau^2 - 0 \text{ s},000 \, 0062 \, \tau^3$$

τ est le nombre de siècles juliens écoulés depuis J 2000 (voir exercice E1-1), soit :

$$\tau = \frac{\text{JJ} - 2451545,0}{36525} \text{SJ}$$

Ainsi, le 1^{er} janvier 2004 à 0 h UTC correspond à 2 453 005,5 JJ et on trouve bien :

$$T_0 = 6 \text{ h } 39 \text{ min } 59 \text{ s},663$$

On rappelle qu'en un lieu de longitude G , exprimée en degrés, la relation donnant le temps sidéral moyen local (LMST) est :

$$\text{LMST} = \text{GMST} - \frac{G}{15^\circ}$$

(*) Voir par exemple : Graham Woan, *The Cambridge Handbook of Physics Formulas*, Cambridge University Press 2000.

exercices

E10-1 Matrices rotations appliquées au changement de systèmes de coordonnées

Le but de cet exercice est d'obtenir les formules de passage d'un système de coordonnées à l'autre à partir de la rotation qui les lie.

1. On considère dans un premier temps, le repère orthonormé $\{O ; x, y, z\}$ et sa base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ représentés à la figure suivante :

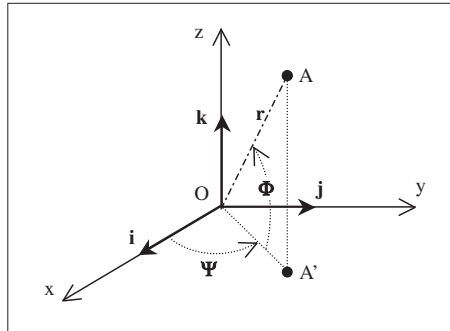


Figure 10.7 Coordonnées du point A.

a) Écrire les coordonnées polaires et cartésiennes du point A dont la projection orthogonale sur le plan $\{x, O, y\}$ est A' .

b) Soit la rotation directe d'axe Ox et d'angle θ_x ; elle fait passer du repère précédant au nouveau repère $\{O ; X, Y, Z\}$ de base $\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$:

– Représenter le nouveau repère par rapport à l'ancien.

– Exprimer chacun des vecteurs de l'ancienne base en fonction de ceux de la nouvelle.

– Écrire la matrice $R(\theta_x)$ de passage des anciennes coordonnées (x, y, z) de A aux nouvelles (X, Y, Z) .

– Quelle est la matrice inverse ?

c) Reprendre la question précédente pour une rotation d'axe Oy et d'angle θ_y .

d) Traiter de même le cas de la rotation d'axe Oz et d'angle θ_z .

2. S'aidant des résultats ci-dessus, on se propose maintenant de retrouver les formules de passage du système de coordonnées horaires au système de coordonnées horizontales, ainsi que les relations inverses, en un point de latitude L .

a) Le repère horaire est tel que l'axe Ox correspond à l'axe origine de l'angle horaire local AHL ; préciser les deux autres axes.

Donner dans ce repère, les coordonnées horaires polaires et cartésiennes d'un astre situé à une distance relative unité.

b) Le repère horizontal est tel que l'axe Ox correspond à la direction du Sud ; préciser les deux autres axes.

Donner dans ce repère, les coordonnées horizontales polaires et cartésiennes de l'astre.

c) Par quelle rotation, passe-t-on du repère horaire à horizontal ? La préciser sur une figure dans un plan approprié, et écrire la matrice correspondante.

d) En déduire les formules de passage des coordonnées horaires à horizontales, et celles relatives au passage inverse.

☞ solutions

1. Matrices rotations

a) Coordonnées de A

Coordonnées polaires :	$\Psi = (Ox, OA')$ $\Phi = (OA', OA)$ $r = OA$	Coordonnées cartésiennes :	$x = r \cos \Phi \cos \Psi$ $y = r \cos \Phi \sin \Psi$ $z = r \sin \Phi$
------------------------	--	----------------------------	---

b) Matrice $R(\theta_x)$

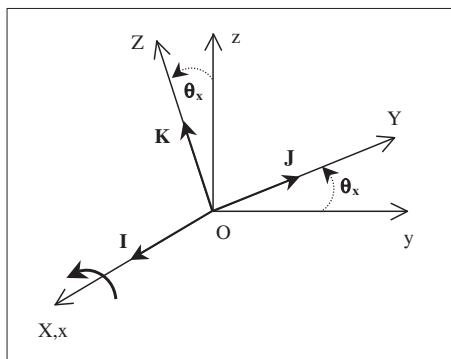


Figure 10.8a Rotation d'axe Ox .

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{I} \\ \vec{j} &= \cos \theta_x \vec{J} - \sin \theta_x \vec{K} \\ \vec{k} &= \sin \theta_x \vec{J} + \cos \theta_x \vec{K}\end{aligned}$$

Considérant les deux repères, il vient :

$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

Les matrices rotations permettant de passer des coordonnées (x, y, z) à (X, Y, Z) et inversement, sont :

$$R(\theta_x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{vmatrix} \quad R_i(\theta_x) = R(-\theta_x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{vmatrix}$$

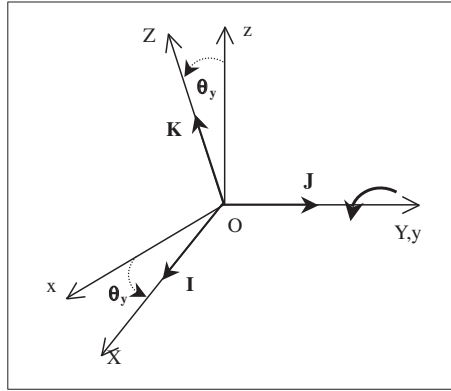
c) Matrice $R(\theta_y)$ 

Figure 10.8b Rotation d'axe Oy.

$$\vec{i} = \cos\theta_y \vec{I} + \sin\theta_y \vec{K}$$

$$\vec{j} = \vec{J}$$

$$\vec{k} = -\sin\theta_y \vec{I} + \cos\theta_y \vec{K}$$

On déduit :

$$R(\theta_y) = \begin{vmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{vmatrix}$$

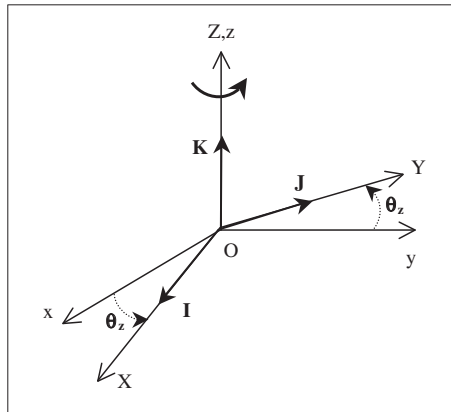
d) Matrice $R(\theta_z)$ 

Figure 10.8c Rotation d'axe Oz.

$$\vec{i} = \cos\theta_z \vec{I} - \sin\theta_z \vec{J}$$

$$\vec{j} = \sin\theta_z \vec{I} + \cos\theta_z \vec{J}$$

$$\vec{k} = \vec{K}$$

On déduit :

$$R(\theta_z) = \begin{vmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Formules de passage entre coordonnées horaires et horizontales

a) Repère et coordonnées horaires

• On se réfère à la figure 9.6, dans laquelle p est l'intersection du méridien local avec l'équateur ; il vient :

$$Ox = Cp \quad Oz = CP_N \quad Oy = Cy \text{ (trièdre direct)}$$

Coordonnées	$\Psi = 360^\circ - AHL$	Coordonnées	$\cos D \cos AHL$
horaires	$\Phi = D$	horaires	$-\cos D \sin AHL$
polaires	$r = 1$	cartésiennes	$\sin D$

b) Repère et coordonnées horizontales

• On se réfère à la figure 9.2 ; $\overrightarrow{PS}$ y représente la direction Sud dans le plan horizontal, $\overrightarrow{PZ}$ est la verticale locale, ainsi :

$$Ox = PS \quad Oz = PZ \quad Oy = Py \text{ (trièdre direct)}$$

Coordonnées	$\Psi = 360^\circ - a$	Coordonnées	$\cos h \cos a$
horizontales	$\Phi = h$	horizontales	$-\cos h \sin a$
polaires	$r = 1$	cartésiennes	$\sin h$

c) Angle de rotation et matrice

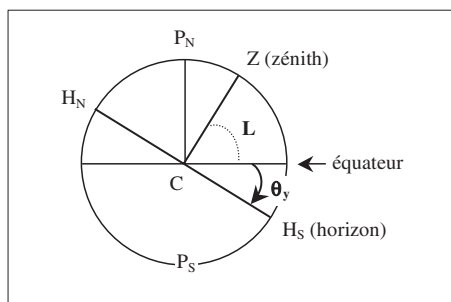


Figure 10.9 Rotation d'axe Oy perpendiculaire au plan du méridien du lieu.

Compte tenu de la distance de l'astre, on confond les centres des deux repères : P est en C, et dans la figure 10.9, on a représenté les traces de l'équateur et de l'horizon local dans le plan du méridien du lieu.

On en déduit que le passage du repère horaire au repère horizontal s'effectue par une rotation d'axe Cy et d'angle :

$$\theta_y = 90^\circ - L$$

Par conséquent :

$$R(\theta_y) = R(90^\circ - L) = \begin{vmatrix} \sin L & 0 & -\cos L \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos L & 0 & \sin L \end{vmatrix}$$

d) Formules de changement de coordonnées

- Horaires à horizontales :

$$\begin{aligned} \cosh \cos a &= \cos D \cos AHL \sin L - \sin D \cos L \\ \cosh \sin a &= \cos D \sin AHL \\ \sinh &= \cos D \cos AHL \cos L + \sin D \sin L \end{aligned}$$

- Horizontales à horaires :

$$\begin{aligned} \cos D \cos AHL &= \cosh \cos a \sin L + \sinh \cos L \\ \cos D \sin AHL &= \cosh \sin a \\ \sin D &= -\cosh \cos a \cos L + \sinh \sin L \end{aligned}$$

E10-2 Influence du recul du point γ sur la dérive des étoiles

Dans cet exercice, on se propose dans un premier temps de déterminer les relations entre coordonnées équatoriales (α, δ) et écliptiques (λ, β) à partir de la rotation faisant passer d'un repère à l'autre. On déterminera ensuite, l'incidence du recul du point γ sur les coordonnées équatoriales.

1. L'obliquité est l'angle ε des plans équatorial et écliptique ;

$\varepsilon = 23^\circ 26' 21'',4$ en J 2000.

a) Pour chacun des deux repères, préciser les axes de référence et exprimer les coordonnées polaires et cartésiennes d'un astre.

b) Par quelle rotation passe-t-on d'un repère à l'autre ? Écrire la matrice correspondante.

c) Donner les formules de passage entre coordonnées équatoriales et écliptiques, ainsi que les relations inverses.

2. Le point γ recule sur l'écliptique de $50'',3$ par an. On ne tient pas compte de la variation annuelle de l'obliquité. Les coordonnées équatoriales sont donc, par l'intermédiaire de la dérive de γ , fonction du temps.

a) Dériver les formules donnant les coordonnées équatoriales en fonction des coordonnées écliptiques ; puis, s'aidant des formules inverses, exprimer les dérivées des coordonnées équatoriales comme produit d'une fonction de ε , α , δ avec la dérivée de la longitude écliptique.

b) Application numérique :

– Calculer les variations annuelles des coordonnées équatoriales.

– Quelles seront les coordonnées de Sirius et Véga au 1^{er} juillet 2005 ?

Au 1^{er} juillet 2004,

$$\alpha_{\text{Sirius}} = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 20,8 \text{ s}$$

$$\delta_{\text{Sirius}} = -16^\circ 43' 21''$$

$$\alpha_{\text{Véga}} = 18 \text{ h } 37 \text{ min } 5,5 \text{ s}$$

$$\delta_{\text{Véga}} = +38^\circ 47' 17''$$

c) Déterminer les couples de coordonnées équatoriales invariables dans le temps et en déduire les coordonnées écliptiques correspondantes.

solutions

1. Formules de passage entre coordonnées équatoriales et écliptiques

a) Axes de références et coordonnées polaires et cartésiennes

On se reporte à la figure 10.5.

• Coordonnées équatoriales

Axes : $Ox = C\gamma$ $Oz = CP_N$ $Oy = Cy$ (trièdre direct)

Coordonnées	α		$\cos \delta \cos \alpha$
polaires :	δ	cartésiennes :	$\cos \delta \sin \alpha$
	1		$\sin \delta$

• Coordonnées écliptiques

Axes : $Ox = C\gamma$ $Oz = CQ_N$ $Oy = Cy$ (trièdre direct)

Coordonnées	λ		$\cos \beta \cos \lambda$
polaires :	β	cartésiennes :	$\cos \beta \sin \lambda$
	1		$\sin \beta$

b) Matrice $R(\epsilon)$

La rotation d'axe $Ox = C\gamma$ et d'angle $\theta_x = \epsilon$ permet de passer des coordonnées équatoriales à écliptiques ; la matrice rotation est :

$$R(\epsilon) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{vmatrix}$$

c) Formules de changement de coordonnées

• Coordonnées équatoriales à écliptiques

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha \quad (1)$$

$$\cos \beta \sin \lambda = \cos \delta \sin \alpha \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon \quad (2)$$

$$\sin \beta = -\cos \delta \sin \alpha \sin \epsilon + \sin \delta \cos \epsilon \quad (3)$$

• Coordonnées écliptiques à équatoriales

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \quad (4)$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon \quad (5)$$

$$\sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon \quad (6)$$

2. Recul du point γ

a) Expressions de $d\alpha/dt$ et $d\delta/dt$ en fonction de $d\lambda/dt$

- Dérivée des formules (4), (5) et (6) :

$$\sin \delta \cos \alpha \frac{d\delta}{dt} + \cos \delta \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \cos \beta \sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} \quad (7)$$

$$-\sin \delta \sin \alpha \frac{d\delta}{dt} + \cos \delta \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \cos \beta \cos \epsilon \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} \quad (8)$$

$$\cos \delta \frac{d\delta}{dt} = \cos \beta \sin \epsilon \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} \quad (9)$$

Combinant (7) et (8) il vient :

$$\cos \delta \frac{d\alpha}{dt} = (\sin \alpha \cos \beta \sin \lambda + \cos \alpha \cos \epsilon \cos \beta \cos \lambda) \frac{d\lambda}{dt}$$

avec : $\cos \delta \frac{d\delta}{dt} = \sin \epsilon \cos \beta \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt}$

- Tenant compte des relations (1) et (2), on obtient finalement :

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \frac{d\lambda}{dt} \quad (10)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \sin \epsilon \cos \alpha \frac{d\lambda}{dt} \quad (11)$$

b) Application numérique

- $\epsilon = 23^\circ,439\,278$; pour dt correspondant à un an, on calcule :

$$d\alpha = (46'',15 + 20'',01 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) / \text{an}$$

$$d\alpha = (3,077 + 1,334 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \text{s} / \text{an} \quad d\delta = 20'',01 \cos \alpha / \text{an}$$

- Au 1/07/04,

$$\alpha_{\text{Sirius}} = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 20,8 \text{ s} = 101^\circ,336\,67 \quad \delta_{\text{Sirius}} = -16^\circ 43' 21'' = -16^\circ,7225$$

– on calcule

$$d\alpha_{\text{Sirius}} = 2,7 \text{ s}$$

$$d\delta_{\text{Sirius}} = -4''$$

$$\alpha_{\text{Véga}} = 18 \text{ h } 37 \text{ min } 5,5 \text{ s} = 279^\circ,272\,91 \quad \delta_{\text{Véga}} = 38^\circ 47' 17'' = 38^\circ,788\,056$$

– on calcule

$$d\alpha_{\text{Véga}} = 2,0 \text{ s}$$

$$d\delta_{\text{Véga}} = +3''$$

Au 1/07/05,

$$\alpha_{\text{Sirius}} = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 23,5 \text{ s}$$

$$\delta_{\text{Sirius}} = -16^\circ 43' 25''$$

$$\alpha_{\text{Véga}} = 18 \text{ h } 37 \text{ min } 7,5 \text{ s}$$

$$\delta_{\text{Véga}} = 38^\circ 47' 20''$$

c) Couples de coordonnées invariables dans le temps

Il faut satisfaire, d'après (11), à $\cos \alpha = 0$, soit $\alpha = 90^\circ$ ou 270° ; d'où, d'après (10) :

$$- 1^{\text{er}} \text{ cas, } \alpha = 90^\circ \rightarrow \operatorname{tg} \delta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \operatorname{tg}(\varepsilon - 90^\circ)$$

$$- 2^{\text{e}} \text{ cas, } \alpha = 270^\circ \rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon)$$

Les couples invariables sont donc :

$(\alpha = 6 \text{ h}, \delta = \varepsilon - 90^\circ)$ qui correspond au pôle Sud écliptique
 $(\beta = -90^\circ, \lambda \text{ indéterminé}).$

$(\alpha = 18 \text{ h}, \delta = 90^\circ - \varepsilon)$ qui correspond au pôle Nord écliptique
 $(\beta = +90^\circ, \lambda \text{ indéterminé}).$

E10-3 Lever, coucher, passage au méridien des étoiles

L'observateur est au point de coordonnées géographiques (L,G). On note (h,Z) les coordonnées locales de l'étoile, et (D,α) ses coordonnées équatoriales. Les données du problème sont :

– lieu d'observation : Latitude $L = 48^\circ 50' 11''$

Longitude $G = -0 \text{ h } 09 \text{ min } 21 \text{ s}$

– Étoile Sirius : Déclinaison $D = -16^\circ 43' 21''$

Ascension droite $\alpha = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 21 \text{ s}$

– Étoile Arcturus : Déclinaison $D = +19^\circ 09' 33''$

Ascension droite $\alpha = 14 \text{ h } 15 \text{ min } 52 \text{ s}$

Pour l'ensemble des questions concernées, l'application numérique sera faite au lever et au coucher de l'étoile.

1. *Quelle est l'expression de l'angle horaire local H de l'étoile à son lever et à son coucher ?*

Le calculer pour Sirius en tenant compte de la réfraction, c'est-à-dire en retranchant $\sin r_0$ au numérateur de l'expression trouvée (justifier). Les valeurs seront données en h, min, s.

2.

a) *Écrire la relation liant l'angle horaire de l'étoile au temps sidéral T ; puis exprimer T au lever et au coucher. Faire l'application numérique.*

b) *Quel est le temps sidéral T_l correspondant à Greenwich ? Le calculer.*

c) *Que vaut son écart ΔT par rapport au temps sidéral T_0 à 0 h UTC ? Le calculer également et donner l'heure UT correspondante.*

d) *Quelles sont les heures légales t_l de lever et t_c de coucher, ce 1^{er} juillet 2004 à Paris ?*

3. *On veut maintenant connaître les azimuts Z_l de l'étoile à son lever et Z_c à son coucher ; quelle relation les lie ?*

Montrer que $\cos Z$ s'exprime simplement en fonction de la latitude d'observation et de la déclinaison de l'étoile.

Effectuer les calculs sans tenir compte de la réfraction ; puis en la prenant en compte, c'est-à-dire en ajoutant le terme correctif $\sin r_0 \operatorname{tg} L$ (justifier).

4. Exprimer la hauteur h_{md} de l'étoile au méridien ainsi que l'heure légale t_{md} de passage. Faire l'application pour Sirius.

5. Effectuer tous les calculs précédents à l'aide d'un tableur, et donner les différents résultats pour Arcturus.

Autres données :

Angle de réfraction $r_0 = 34'$ Temps sidéral $T_0 = 18 \text{ h } 37 \text{ min } 32 \text{ s}$.

solutions

1. Angle horaire local AHL_e (H) de l'étoile

Pour $h = 0$ les équations de passage des coordonnées horizontales aux coordonnées horaires s'écrivent :

$$\sin D = \cos L \cos Z$$

$$\cos D \sin AHL_e = -\sin Z$$

$$\cos D \cos AHL_e = -\sin L \cos Z$$

Considérant la troisième et la première équation, on déduit :

$$\cos AHL_e = -\frac{\sin L}{\cos D} \frac{\sin D}{\cos L}$$

soit :

$$\cos H = -\operatorname{tg} L \operatorname{tg} D$$

La latitude d'observation est $L = +48^\circ 50' 11'' = 48,8364$

La déclinaison de Sirius est D (ou δ) $= -16^\circ 43' 21'' = -16,7225$

- Sans correction de réfraction on calcule

$$\cos H = 0,343 \, 633 \quad H = \pm 69^\circ,9016$$

$$\rightarrow H = \pm 4 \text{ h } 54 \text{ min } 06 \text{ s}$$

- Tenant compte de la réfraction r_0 à l'horizon, le cosinus de l'angle horaire s'écrit :

$$\cos H = -\frac{\sin r_0}{\cos L \cos D} - \frac{\sin L \sin D}{\cos L \cos D}$$

$$r_0 = 34' = 0^\circ,5667 \quad \rightarrow \quad \frac{\sin r_0}{\cos D \cos L} = 0,015 \, 689$$

Cette expression se déduit de la relation :

$$\sinh = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos H \text{ dans laquelle } h = -r_0$$

On obtient donc : $\cos H = 0,327 \, 944 \quad \rightarrow \quad H = \pm 70^\circ,8560$

Au lever : $H_l = -70^\circ,8560 = 289^\circ,1440 \quad \rightarrow \quad H_l = 19 \text{ h } 16 \text{ min } 35 \text{ s}$

Au coucher : $H_c = +70^\circ,8560 \quad \rightarrow \quad H_c = 4 \text{ h } 43 \text{ min } 25 \text{ s}$

2. Temps sidéraux, et heure de lever ou coucher

a) On a établi : $AHL_e = AV_e + AHL\gamma$, soit $H = -\alpha + T$

Ainsi, puisque $T = \alpha + H$:

le lever correspond à $T = \alpha - |H|$ le coucher à $T = \alpha + |H|$

L'ascension droite de Sirius est $\alpha = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 21 \text{ s}$, d'où les temps sidéraux :

du lever $T = 2 \text{ h } 01 \text{ min } 56 \text{ s}$; du coucher : $T = 11 \text{ h } 28 \text{ min } 46 \text{ s}$

b) Temps sidéral correspondant T_1 de Greenwich

On a établi : $AHL\gamma = AHG\gamma - G$, soit $T = T_1 - G$

Le temps sidéral de Greenwich est $T_1 = T + G$; la longitude du lieu

$G = -0 \text{ h } 09 \text{ min } 21 \text{ s}$

Ainsi :

au lever $T_1 = 1 \text{ h } 52 \text{ min } 35 \text{ s}$; au coucher $T_1 = 11 \text{ h } 19 \text{ min } 25 \text{ s}$

c) Intervalle de Temps sidéral ΔT et heure UT correspondante

Le temps sidéral de Greenwich à 0 h UTC est $T_0 = 18 \text{ h } 37 \text{ min } 32 \text{ s}$.

$\Delta T = T_1 - T_0$, d'où,

au lever $\Delta T = 7 \text{ h } 15 \text{ min } 03 \text{ s}$; au coucher $\Delta T = 16 \text{ h } 41 \text{ min } 53 \text{ s}$

$UT = \Delta T \times 0,997\,2696$, ce qui donne :

au lever $UT = 7 \text{ h } 13 \text{ min } 51 \text{ s}$; au coucher $UT = 16 \text{ h } 39 \text{ min } 09 \text{ s}$

d) Heures légales t_1 et t_c

En juillet 2004, nous sommes à l'heure d'été et $t = UT + 2$, soit :

au lever $t_1 = 9 \text{ h } 13 \text{ min } 51 \text{ s}$; au coucher $t_c = 18 \text{ h } 39 \text{ min } 09 \text{ s}$

3. Azimuts Z_1 de l'étoile au lever et Z_c au coucher

Notons que :

Au lever, c'est-à-dire avant le passage au méridien : $0^\circ < Z_1 < 180^\circ$

ou $-180^\circ < a_1 < 0^\circ$

Au coucher, c'est-à-dire après le passage au méridien : $180^\circ < Z_c < 360^\circ$

ou $0^\circ < a_c < 180^\circ$

et, pour une étoile considérée comme fixe : $Z_1 + Z_c = 360^\circ$ ou $a_1 + a_c = 0^\circ$

Lorsque $h = 0$, le groupe de Gauss correspondant au passage des coordonnées horaires à locales s'écrit :

$$0 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos AHL_e$$

$$\sin Z = -\cos D \sin AHL_e$$

$$\cos Z = \sin D \cos L - \cos D \sin L \cos AHL_e$$

$$\text{On en tire : } \cos Z = \sin D \cos L + \sin L \frac{\sin L \sin D}{\cos L}$$

$$\text{d'où après simplification : } \cos Z = \frac{\sin D}{\cos L}$$

- Sans correction de réfraction :

$$\cos Z = \frac{\sin D}{\cos L} = -0,437\,149 \quad Z = 115^\circ,9221$$

soit :

au lever

au coucher

$$Z = -115^\circ,9221 = 244^\circ,0779$$

$$Z_l = 115^\circ\,55'\,20''$$

$$Z_c = 244^\circ\,04'\,40''$$

- Avec correction de réfraction, la formule rigoureuse est :

$$\cos r_0 \cos Z = \sin r_0 \operatorname{tg} L + \frac{\sin D}{\cos L} ; \text{ avec } \sin r_0 \operatorname{tg} L = 0,011\,312$$

elle se déduit de la 1^{re} et de la 3^e relation de Gauss, qui, lorsque $h = -r_0$ s'écrit :

$$-\sin r_0 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos H$$

$$\cos r_0 \cos Z = \sin D \cos L - \sin L \cos D \cos H$$

On calcule : $\cos Z = -0,425\,858 \quad Z = 115^\circ,2050$

soit :

au lever

au coucher

$$Z = -115^\circ,2050 = 244^\circ,7950$$

$$Z_l = 115^\circ\,12'\,18''$$

$$Z_c = 244^\circ\,47'\,42''$$

4. Hauteur h_{md} de l'étoile au méridien et heure t_{md} de passage

- On a établi que, au méridien du lieu : $h = 90^\circ + (D - L)$

Pour Sirius : $D - L = -65^\circ\,33'\,32''$ d'où $h_{\text{md}} = 24^\circ\,26'\,28''$

- Toujours au méridien, $T = \alpha = 6\text{ h }45\text{ min }21\text{ s}$

$$T_l = T + G = 6\text{ h }36\text{ min }00\text{ s}$$

$$\Delta T = T_l - T_0 = 11\text{ h }58\text{ min }28\text{ s} = 11\text{ h},9744$$

$$UT = \Delta T \times 0,997\,2696 = 11\text{ h},9417 = 11\text{ h }56\text{ min }30\text{ s}$$

soit en heure légale d'été : $t_{\text{md}} = 13\text{ h }56\text{ min }30\text{ s}$

On vérifie que c'est bien la demi-somme des heures de lever et coucher.

5. Calculs pour l'étoile Arcturus

Arcturus	lever	méridien	coucher
Angle horaire $H =$	16 h 22 min 21 s	0 h 00 min 00 s	7 h 37 min 39 s
Temps sidéral $T =$	6 h 38 min 13 s	14 h 15 min 52 s	21 h 53 min 31 s
Temps sidéral $T_l =$	6 h 28 min 52 s	14 h 06 min 31 s	21 h 44 min 10 s
Écart $\Delta T =$	11 h 51 min 20 s	19 h 28 min 59 s	27 h 06 min 38 s
Heure UT =	11 h 49 min 24 s	19 h 25 min 48 s	3 h 02 min 11 s
Hauteur $h =$	- 34' 00"	60° 19' 22"	- 34' 00"
Azimut $Z =$	59° 20' 22"	180° 00' 00"	300° 39' 38"

L'heure en italique correspond au lendemain, soit le 2 juillet 2004.

E10-4 Visibilité des étoiles

Il convient d'avoir traité auparavant l'exercice E10-3.

La voûte céleste est observée le 1^{er} juillet 2004 en un lieu de latitude L et de longitude D .

On donne : $L = 48^\circ 50' 11''$ $G = -0 \text{ h } 09 \text{ min } 21 \text{ s}$

À cette date, le temps sidéral de Greenwich à 0 h UTC a pour valeur $T_0 = 18 \text{ h } 37 \text{ min } 32 \text{ s}$.

On utilisera l'heure légale.

1. Faire un schéma en coupe faisant apparaître la zone visible.

Quelle est la condition pour qu'une étoile de déclinaison δ soit toujours visible (étoile **circumpolaire**) ou toujours invisible ?

2. On considère les 16 étoiles dont l'ascension droite α et la déclinaison δ sont fournies dans le tableau du chapitre 10, paragraphe 2.

Quelles sont les étoiles circumpolaires ? Pour les autres, donner dans un tableau :

- l'azimut et l'heure du lever,
- la hauteur et l'heure lors du passage au méridien,
- l'azimut et l'heure du coucher.

On tiendra compte de la réfraction.

3. Considérant le crépuscule civil, l'heure légale de coucher du Soleil est 22 h 39 min ; celle du lever les 1^{er} et 2 juillet est 5 h 10 min (voir exercice E9-4).

Déterminer les durées d'observation des 16 étoiles.

solutions

1. Conditions de visibilité

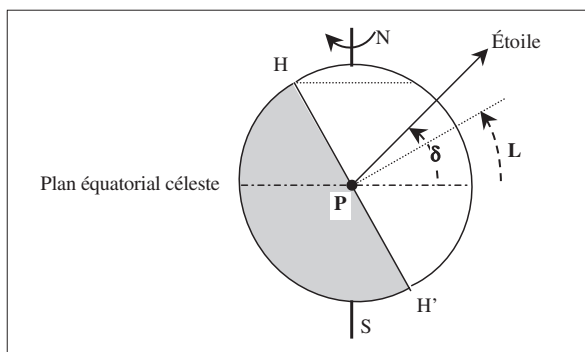


Figure 10.10 Coupe du ciel vu par l'observateur en P.

L'observateur terrestre est en P au centre de la sphère céleste qui lui apparaît tourner d'Est en Ouest et qui est coupée en H et H' par le plan horizontal local.

On a par définition :

$$-90^\circ < \delta < +90^\circ$$

On en déduit les conditions de visibilité ou de non visibilité :

Si : $\delta > 90^\circ - L$ → étoile toujours visible (circumpolaire) ;

$\delta < -(90^\circ - L)$ → étoile toujours invisible.

Si $-(90^\circ - L) < \delta < 90^\circ - L$ → l'étoile se lève et se couche.

2. Lever, coucher et passage au méridien

• $90^\circ - L = 41^\circ 09' 49''$ → Capella (la Chèvre) et Deneb sont toujours visibles.

• Tableau :

Étoile	Lever		Passage au méridien		Coucher	
	azimut ° ' "	heure h min s	hauteur ° ' "	heure h min s	azimut ° ' "	heure h min s
Sirius	115 12 18	9 13 51	24 26 28	13 56 30	244 47 42	18 39 09
Arcturus	59 20 22	13 49 24	60 19 22	21 25 47	300 39 38	5 02 11
Véga	15 36 54	15 08 51	79 57 06	1 46 18	344 23 06	12 23 45
Capella			87 09 57	12 28 25		
Rigel	101 50 50	7 01 27	32 58 01	12 26 09	258 09 10	17 50 52
Procyon	81 24 35	8 24 10	46 22 37	14 50 33	278 35 25	21 16 56
Bételgeuse	78 02 31	6 30 04	48 34 16	13 06 42	281 57 29	19 43 21
Altaïr	75 46 02	20 16 24	50 02 39	3 00 01	284 13 58	9 43 38
Aldébaran	63 41 10	4 25 45	57 40 54	11 47 41	296 18 50	19 09 37
Spica	106 27 47	15 25 02	29 58 44	20 35 30	253 32 13	1 45 57
Antarès	131 42 00	19 53 53	14 43 19	23 39 15	228 18 00	3 24 36
Pollux	43 32 07	6 23 06	69 10 43	14 56 35	316 27 53	23 30 04
Deneb			86 27 37	03 54 23		
Fomalhaut	137 39 22	2 47 48	11 33 55	06 10 20	222 20 38	9 32 52
Régulus	70 59 15	10 20 43	53 06 31	17 19 13	289 00 45	0 17 43
Castor	35 32 28	5 40 11	73 02 30	14 45 54	324 27 32	23 51 37

Les heures en italique correspondent au lendemain 2 juillet.

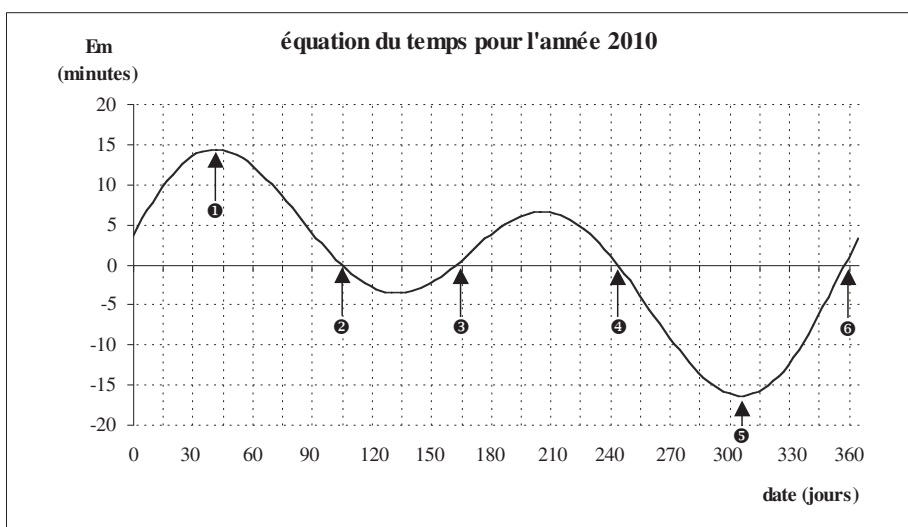
3. Durées d'observation

Le Soleil se couchant à 22 h 39 min et se levant à 5 h 10 min, la durée de la **nuît civile** est donc de 6 h 31 min.

Étoile	durée	Étoile	Durée	Étoile	Durée	Étoile	Durée
Sirius	0 h 00 min	Rigel	0 h 00 min	Aldébaran	<i>0 h 44 min</i>	Deneb	6 h 31 min
Arcturus	6 h 23 min	Procyon	0 h 00 min	Spica	3 h 07 min	Fomalhaut	<i>2 h 22 min</i>
Véga	6 h 31 min	Bételgeuse	0 h 00 min	Antarès	4 h 46 min	Régulus	1 h 39 min
Capella	6 h 31 min	Altaïr	6 h 31 min	Pollux	0 h 51 min	Castor	1 h 13 min

Les durées en italique correspondent à une observation le matin du 1^{er} juillet, avant le lever du Soleil ; les autres observations ayant lieu dans la nuit du 1^{er} au 2 juillet.

Comme indiqué au paragraphe 4, nous terminons ce chapitre par un retour sur les temps solaires vrai et moyen.



Les dates et heures UTC correspondant aux 6 points caractéristiques sont :

- | | | | |
|-----------------------------|---------------|------------------|--|
| ❶ 11 février | à 11 h 59 min | Em = 14,243 min | $t_m = t_v + 14 \text{ min } 15 \text{ s}$ |
| ❷ 15 avril | à 16 h 22 min | Em = 0 | $t_m = t_v$ |
| ❸ 13 juin | à 7 h 37 min | Em = 0 | $t_m = t_v$ |
| ❹ 1 ^{er} septembre | à 14 h 52 min | Em = 0 | $t_m = t_v$ |
| ❺ 3 novembre | à 9 h 50 min | Em = -16,445 min | $t_m = t_v - 16 \text{ min } 27 \text{ s}$ |
| ❻ 25 décembre | à 10 h 33 min | Em = 0 | $t_m = t_v$ |

Afin de délivrer une heure proche de l'heure civile, les gnomonistes intègrent l'équation du temps dans l'élaboration de leurs cadrans solaires...

Chapitre 11

Repérage des orbites et éphémérides

Dans un premier temps, nous positionnons la trajectoire elliptique de l'astre par rapport à un plan et une direction de référence : à cette fin, trois angles sont définis. Ayant repéré à un instant donné l'astre sur l'ellipse, nous indiquons ensuite comment, grâce à la connaissance des six variables elliptiques, nous passons par exemple des coordonnées polaires de l'astre ou du satellite artificiel à ses coordonnées équatoriales terrestres.

Une première application illustrant ce dernier chapitre porte sur les satellites semi-synchrones largement utilisés par les soviétiques pour leurs télécommunications. L'exercice nous donne le cahier des charges permettant de préciser la trajectoire, puis de déterminer en fonction du temps, les coordonnées géographiques de la trace au sol du satellite, que l'on retranscrira sur une carte du monde.

L'objet des deux exercices suivants sera d'obtenir les coordonnées équatoriales terrestres de certains points particuliers de la trajectoire de Vénus. Dans le premier exercice, nous déterminerons les dates de passage en ces points et les coordonnées polaires de ceux-ci. Pour ces dates, les grandeurs intermédiaires à calculer seront alors les coordonnées écliptiques héliocentriques de Vénus et de la Terre. Dans le dernier exercice, toujours pour ces mêmes dates, nous déduirons les coordonnées équatoriales terrestres de Vénus à partir des éphémérides afin d'estimer la précision des résultats précédents.

1 Éléments d'orbites

1.1 Plans et axes de repère

■ Plan orbital

La trajectoire de la planète ou du satellite est une ellipse s'inscrivant dans un plan appelé plan d'orbite ou orbital qui contient les foyers F' et F. Le foyer F est le Soleil pour une orbite héliocentrique ou la Terre pour une orbite géocentrique.

L'ellipse est définie par :

- son demi-grand axe a ,
- son excentricité e .

On rappelle que :

- la distance FP (foyer-péricentre) est $\rho_p = a(1 - e)$
- la distance FA (foyer-apocentre) est $\rho_A = a(1 + e)$
- le paramètre $p = a(1 - e^2)$

L'équation polaire de l'ellipse s'écrit :
$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

l'angle polaire θ ou v représente l'anomalie vraie comptée dans le sens direct à partir de l'axe FP.

■ Plan de référence

On le choisit selon le couple d'astres considéré ; par exemple :

- Pour une planète orbitant autour du Soleil, le plan de référence est le **plan écliptique**.
- Pour un satellite de la Terre, le plan de référence est le **plan équatorial**.

Le plan de référence contient le foyer F, et on notera $\vec{K}$ le vecteur unitaire qui lui est normal en F et dirigé vers le Nord (le haut !).

■ Ligne des nœuds

L'intersection du plan de référence avec le plan orbital est la droite dénommée **ligne des nœuds**. Le point F appartient à celle-ci puisqu'il est contenu dans les deux plans.

- Le **nœud ascendant** N_A est le point d'intersection de la ligne des nœuds avec l'ellipse lorsque l'astre traverse le plan de référence en allant du Sud vers le Nord (trajectoire ascendante).
- Le **nœud descendant** N_D correspond au passage de l'astre du Nord vers le Sud dans sa trajectoire descendante.

On note $\vec{L}_{asc}$ le vecteur unitaire dirigé du foyer vers le nœud ascendant.

■ *Ligne de référence*

Afin de compléter la référence spatiale, on considère une ligne de référence située dans le plan de référence :

- si ce plan est le plan équatorial ou écliptique, alors la ligne de référence est l'intersection de ces deux plans correspondant à la **ligne des équinoxes** ;
- si le plan de référence est autre, on choisira dans ce plan un axe de référence passant également par F.

On notera $\vec{I}$ le vecteur unitaire de l'axe de référence s'appuyant sur F ; sur la ligne des équinoxes il est dirigé vers le point γ . On définit ainsi une base directe $\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$ du repère de référence.

1.2 Position de l'orbite

Elle est déterminée par trois angles :

- deux angles permettent de préciser le plan orbital par rapport au plan et à l'axe de référence ; ce sont :
 - l'angle Ω pour positionner la ligne des nœuds ;
 - l'angle i pour donner l'inclinaison du plan ;
- un angle permet de situer l'ellipse dans le plan orbital ; c'est :
 - l'angle ω lié au grand axe de l'ellipse .

On définit ci-dessous chacun des angles.

■ *Ascension droite*

L'angle Ω dénommé **ascension droite du nœud ascendant** N_A est mesuré dans le plan de référence ; c'est l'angle orienté entre la direction de référence et la ligne des nœuds. Sur l'écliptique, Ω est la **longitude du nœud ascendant**.

Ω est l'angle, compté dans le sens direct, des deux vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{L}_{asc}$:

$$\Omega = (\vec{I}, \vec{L}_{asc})$$

■ *Inclinaison*

L'**inclinaison** i est l'angle entre le plan de référence et le plan orbital.

Soit $\vec{N}_{est}$ la normale à la ligne des nœuds au nœud ascendant, contenue dans le plan de référence et orientée vers l'Est.

Soit $\vec{N}_{dep}$ la normale à la ligne des nœuds au nœud ascendant contenue dans le demi-plan orbital supérieur ; elle est orientée dans le sens de déplacement du satellite.

L'angle d'inclinaison est alors défini par :

$$i = (\vec{N}_{est}, \vec{N}_{dep})$$



Il est compris entre 0° et 180° , et peut être représenté par la variable :

$$\gamma = \sin \frac{i}{2}$$

■ *Argument du péricentre*

L'angle ω , **argument du péricentre**, est mesuré dans le plan orbital. C'est l'angle orienté entre la ligne des nœuds et la ligne joignant l'apocentre et le péricentre, appelée **ligne des apsides**.

À partir du centre F, on considère un vecteur $\vec{L}_{\text{per}}$ dirigé vers le péricentre ; ainsi ω est l'angle, compté dans le sens direct, des vecteurs $\vec{L}_{\text{asc}}$ et $\vec{L}_{\text{per}}$:

$$\omega = (\vec{L}_{\text{asc}}, \vec{L}_{\text{per}})$$



Si l'inclinaison est faible, la ligne des nœuds est mal définie entraînant une dégradation de la précision sur l'ascension droite et l'argument du péricentre. On a ainsi été amené à définir une nouvelle grandeur angulaire, la **longitude du péricentre** ϖ telle que :

$$\varpi = \Omega + \omega$$

1.3 Position de l'astre sur l'orbite

■ *Par anomalie vraie*

La position de la planète ou du satellite à l'instant t est définie par son anomalie vraie θ ($t - t_p$) angle entre la position actuelle et celle au péricentre à l'instant t_p .

Soit $\vec{L}_{\text{sat}}$ le vecteur unitaire orienté du foyer F vers le satellite ; il vient :

$$\theta = (\vec{L}_{\text{per}}, \vec{L}_{\text{sat}})$$

D'autre part, l'angle entre le nœud ascendant et la position de l'astre est tel que :

$$(\vec{L}_{\text{asc}}, \vec{L}_{\text{sat}}) = (\vec{L}_{\text{asc}}, \vec{L}_{\text{per}}) + (\vec{L}_{\text{per}}, \vec{L}_{\text{sat}}) = \omega + \theta$$

$$\omega + \theta = (\vec{L}_{\text{asc}}, \vec{L}_{\text{sat}})$$

■ *Par anomalie moyenne*

La 3^e Loi de Kepler permet d'accéder au moyen mouvement $n = \frac{2\pi}{T}$

Dans le cas d'une planète, on a vu qu'elle s'écrivait :

$$4\pi^2 \frac{a_p^3}{T_p^2} = G(M_s + M_p) \quad \text{soit} \quad n^2 a_p^3 = GM_s (1 + m_p) \quad \text{avec} \quad m_p = \frac{M_p}{M_s}$$

Pour une planète fictive de masse nulle, on a également vu au chapitre 1 que :

$$k^2 a_0^3 = GM_s$$

(La constante de Gauss k étant une constante de définition proche du moyen mouvement de la Terre, à partir de laquelle a été déduite l'unité astronomique.)

Le grand axe étant exprimé en ua, il découle en laissant tomber l'indice p :

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m)$$

L'anomalie moyenne M est liée au moyen mouvement par la relation :

$$M = n.(t - t_p)$$

Elle permet, par l'intermédiaire de l'équation de Kepler, d'accéder à l'anomalie excentrique φ ou E :

$$\varphi - e \sin \varphi = M$$



On définit la **longitude moyenne** λ comme la somme de l'ascension droite, de l'argument du péricentre et de l'anomalie moyenne :

$$\lambda = \varpi + M$$

■ *Date au périhélie*

Disposant de la formulation en fonction du temps de la longitude moyenne et de la longitude du péricentre ; on en déduit, lorsque ces grandeurs diffèrent d'un multiple m de 360° , la date de passage $t_{p,m}$ des planètes au périhélie.

L'égalité à satisfaire s'écrit :

$$\lambda(t_{p,m} - t_0) - \varpi(t_{p,m} - t_0) = 360 m \quad (m = (0), 1, 2 \dots)$$

La date t_0 à partir de laquelle sont calculés les passages au périhélie correspond à la référence J2000 (voir paragraphe suivant). Le tableau suivant donne, pour les planètes Mercure à Neptune, les instants des deux premiers passages au périhélie exprimés en nombre de jours après t_0 et convertis (*) en date calendaire (J, M, A, h, min).

(*) Voir site www.imcce.fr/julianday.html

Planète	1 ^{er} passage au périhélie		2 ^e passage		au périhélie
	jours	calendrier	jours		calendrier
Mercure	45,256 617	15.02.00 18 h 10 min	133,225 967		13.05.00 17 h 25 min
Vénus	193,232 656	12.07.00 17 h 35 min	417,933 475		22.02.01 10 h 24 min
Terre	2,506 991	04.01.00 00 h 10 min	367,766 627		03.01.01 06 h 24 min
Mars	650,026 318	12.10.01 12 h 38 min	1 337,022 103		30.08.03 12 h 32 min
Jupiter	4 091,936 213	16.03.11 10 h 28 min	8 424,833 673		25.01.23 08 h 00 min
Saturne	1 285,121 707	09.07.03 14 h 55 min	12 049,339 498		27.12.32 20 h 09 min
Uranus	18 668,475 894	10.02.2051 23 h	49 363,340 730		25.02.2135 20 h
Neptune	17 350,135 013	03.07.2047 15 h	77 540,520 275		20.04.2212 00 h

On donne également, le tableau des 5 passages suivants au périhélie de Vénus, la Terre et Mars :

Vénus		Terre		Mars	
jours	calendrier	jours	calendrier	jours	calendrier
642,634 294	05.10.01 03 h 13 min	733,026 263	03.01.02 12 h 38 min	2024,017 888	17.07.05 12 h 26 min
867,335 112	17.05.02 20 h 03 min	1098,285 899	03.01.03 18 h 52 min	2711,013 673	04.06.07 12 h 20 min
1092,035 931	28.12.02 12 h 52 min	1463,545 535	04.01.04 01 h 06 min	3398,009 458	21.04.09 12 h 14 min
1316,736 749	10.08.03 05 h 41 min	1828,805 171	03.01.05 07 h 19 min	4085,005 242	09.03.11 12 h 08 min
1541,437 567	21.03.04 22 h 30 min	2194,064 807	03.01.06 13 h 33 min	4772,001 026	24.01.13 12 h 01 min

Pour notre planète, les résultats peuvent s’écarter légèrement de la réalité, car ils s’appliquent au centre de masse du système Terre-Lune (voir éléments moyens).

Afin d’illustrer ce premier paragraphe, la figure 11.1 visualise les plans, axes et angles liés au repérage de la planète ou du satellite.

2 Variables elliptiques et éphémérides

2.1 Éléments moyens

Au premier paragraphe, on a précisé un ensemble de 6 variables constitué de :

- 3 **variables métriques** a, e, i ou γ ,
- 3 **variables angulaires** Ω , ω ou ϖ , M ou λ .

Ce sont les **variables elliptiques**, dont les valeurs moyennes ou **éléments moyens** sont fournies en fonction du temps τ sous forme de développements polynomiaux. Par exemple :

$$< \Omega > = \Omega_0 + \Omega_1 \tau + \Omega_2 \tau^2 + + \Omega_q \tau^q$$

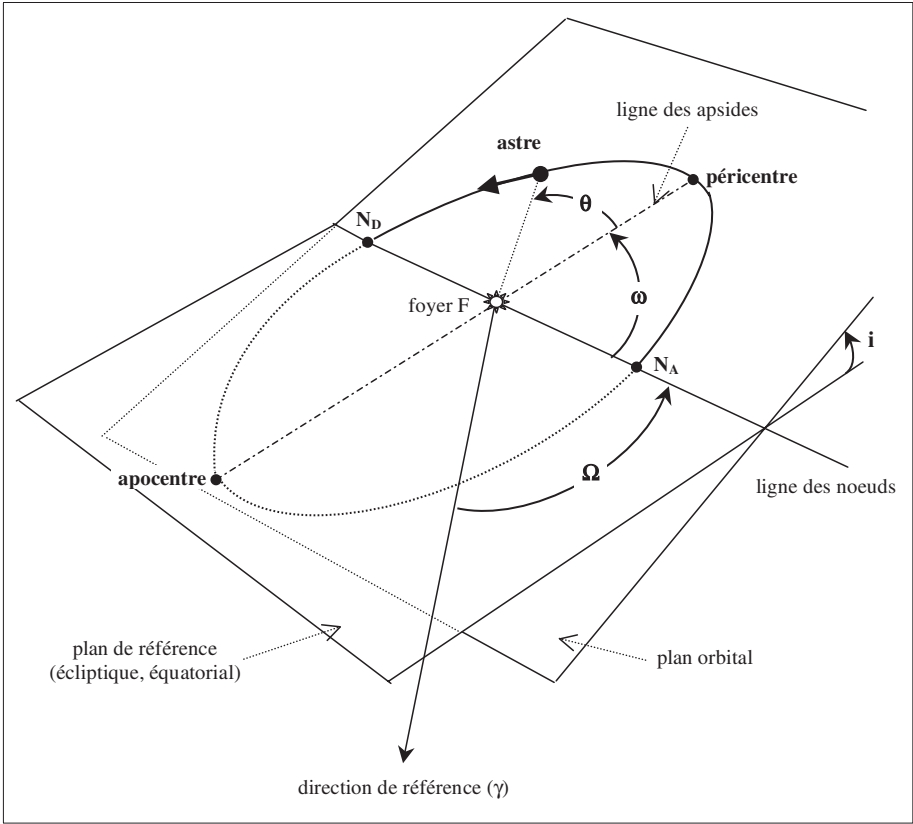


Figure 11.1 Localisation d'un astre par rapport à un plan et une direction de référence.

Le grand axe étant théoriquement invariable, on a normalement :

$$< a > = a_0$$

En ce qui concerne la longitude moyenne λ , le coefficient λ_1 correspond au moyen mouvement *moyen* $\bar{n}$. On a transcrit sa valeur dans le tableau ci-dessous afin de la comparer à celle du moyen mouvement n de la planète considérée :

Planète	période	moyens mouvements	
	T (jours)	n (par jour)	$\bar{n}$ (par jour)
Mercuré	87,97	4° 5' 32",3	4° 5' 32",557 42
Vénus	224,7	1° 36' 7",7	1° 36' 7",807 44
Terre	365,2564	0° 59' 8",192	0° 59' 8",330 49
Mars	687,0	0° 31' 26",5	0° 31' 26",655 90
Jupiter	4 333	0° 4' 59",1	0° 4' 59",265 98
Saturne	10 760	0° 2' 0",446	0° 2' 0",592 47
Uranus	30 689	0° 0' 42",230	0° 0' 42",368 53
Neptune	60 182	0° 0' 21",535	0° 0' 21",672 28

Les coefficients du temps, sauf $\bar{n}$, sont appelés **termes séculaires** d'ordre 1, 2, ...q.

Le temps τ , quant à lui, est compté à partir d'une origine t_0 à laquelle se rapportent l'écliptique et l'équinoxe.

Par exemple, si t_0 correspond au 1^{er} janvier 2000 à 12 heures TU, soit la référence J 2000, la date julienne est : $DJ_0 = 2\,451\,545,0$ JJ.

Compte tenu de la lenteur des variations, le temps τ pour une date julienne quelconque est :

$$\tau = \frac{t - t_0}{365\,250} = \frac{DJ - 2\,451\,545,0}{365\,250}$$

Au 1^{er} janvier 2100, $\tau = 0,1$ correspondant à $DJ = 2\,488\,070$ JJ

Les valeurs moyennes calculées à la date t par ces développements polynomiaux correspondent normalement à l'écliptique et à l'équinoxe de cette date.

Le tableau qui suit donne les éléments moyens des variables métriques et des variables angulaires Ω et ω des planètes pour :

- $\tau = 0$ (1^{er} janvier 2000, cellule supérieure)
- $\tau = 0,1$ (1^{er} janvier 2100, cellule inférieure)

Planète	demi-grand axe a (ua)	excentricité e	inclinaison i	longitude du nœud Ω	argument du périhélie ω
Mercure	0,387 098	0,205 632	7° 00' 17",95	48° 19' 51",21	29° 07' 30",81
	0,387 098	0,205 652	7° 00' 24",44	49° 31' 01",85	29° 29' 44",29
Vénus	0,723 330	0,006 772	3° 23' 40",78	76° 40' 47",71	54° 53' 01",62
	0,723 330	0,006 724	3° 23' 44",39	77° 34' 52",93	55° 23' 00",25
Terre	1,000 001	0,016 709	0°	0°	102° 56' 14",45
	1,000 001	0,016 666	0°	0°	104° 39' 26",15
Mars	1,523 679	0,093 401	1° 50' 59",02	49° 33' 29",14	286° 30' 07",71
	1,523 679	0,093 491	1° 50' 56",90	50° 19' 48",47	287° 34' 16",35
Jupiter	5,202 603	0,048 498	1° 18' 11",76	100° 27' 51",87	273° 52' 00",48
	5,202 603	0,048 661	1° 17' 51",99	101° 29' 08",84	274° 27' 32",69
Saturne	9,554 909	0,055 548	2° 29' 19",96	113° 39' 55",81	339° 23' 30",25
	9,554 907	0,055 201	2° 29' 06",46	114° 32' 32",88	340° 28' 45",75
Uranus	19,218 446	0,046 381	0° 46' 23",51	74° 00' 21",45	98° 59' 57",60
	19,218 446	0,046 354	0° 46' 26",43	74° 31' 42",39	99° 57' 48",39
Neptune	30,110 387	0,009 456	1° 46' 11",83	131° 47' 02",61	276° 20' 10",39
	30,110 387	0,009 462	1° 45' 38",29	132° 53' 11",47	276° 39' 37",57

En conclusion à ce paragraphe, il convient de noter que si les éléments moyens permettent de déduire une orbite et une position moyennes de la planète ou du satellite sur celle-ci, cette orbite n'est pas la trajectoire osculatrice au point où on observe l'astre.

Les éléments moyens ne peuvent que donner une position approximative des planètes car ils ne tiennent pas compte de l'ensemble des périodicités des perturbations qu'elles subissent. Les éphémérides sont en conséquence calculées à partir des théories planétaires les plus complètes.

2.2 Théories planétaires, base des éphémérides

■ *Le problème à N corps pour les planètes*

Comme on l'a développé au chapitre 6, les corps du système solaire s'attirent mutuellement conformément à la loi de la gravitation universelle. Il s'agit d'un problème à N corps que l'on résout en tenant compte de la faible masse des planètes par rapport au Soleil.

Chaque planète est considérée avec son cortège de satellites et astéroïdes connus, si bien que c'est le mouvement du barycentre de l'ensemble que déterminent les théories planétaires. Pour une planète ainsi considérée, le mouvement va être influencé par l'ensemble des autres ; chacune apportant sa contribution à la perturbation globale (voir chapitre 6 paragraphe 2.2).

■ *Historique de sa résolution*

Dès l'antiquité, l'*Almageste* de Ptolémée, gigantesque ouvrage en treize volumes, permettait déjà de calculer pour une date quelconque, les positions du Soleil, de la Lune et des Planètes.

Du ^{xiii}e au ^{xvi}e siècle, trois tables célèbres vont se succéder ; ce sont :

- les **Tables Alphonsines**, du nom du roi Alphonse de Castille (1221-1284).
- les **Tables Pruteniques**, dénommées ainsi en l'honneur du roi de Prusse ; établies par l'astronome allemand Érasme Reinhold (1511-1553) à partir du modèle copernicien, elles ont détrôné les tables précédentes par la qualité des éphémérides déduites ;
- les **Tables Rodolphines**, en hommage à l'empereur Rodolphe II de Hongrie, éditées à Ulm en 1627.

Une meilleure précision est encore atteinte par ces dernières tables, Kepler appliquant à la cosmologie copernicienne, délivrée des épicycles, les mesures rigoureuses des astres effectuées par le danois Tycho Brahé (1546-1601).

Des éphémérides vont ensuite être régulièrement publiées, par exemple dans :

– la *Connaissance des temps* en France, dès 1679, grâce à Joachim d'Alencé (1640-1707) ;

– le *Nautical Almanach and Astronomical Ephemeris* en Grande-Bretagne, dès 1766, grâce à l'astronome Nevil Maskelyne (1732-1811).

Les théories planétaires, à partir desquelles ont été construites les éphémérides récentes, doivent beaucoup aux travaux des Français Laplace (1749-1827) et Le Verrier (1811-1877) et de l'Américain Newcomb (1835-1909) ; en particulier :

– Laplace apporta une contribution théorique déterminante avec, par exemple, le théorème sur l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvements.

– Le Verrier découvrit Neptune en cherchant les perturbations qu'apporterait à Uranus, découverte par Herschel en 1781, une planète située sur l'écliptique à une distance donnée par la **loi empirique de Titius-Bode** (*).

Sa théorie planétaire a longtemps été la référence.

– La théorie des planètes de Newcomb, utilisée dans les éphémérides américaines jusque très récemment, ne diffère fondamentalement pas de celle de Le Verrier ; mais les résultats y sont beaucoup plus précis pour les planètes telluriques.

Les précisions globales données par les théories planétaires actuelles sont toujours meilleures que la seconde d'angle, la théorie donnant 0",10 pour les planètes telluriques.

3 Coordonnées dans un repère de référence donné

La planète ou le satellite étant repérés par leurs coordonnées polaires (e, θ) à l'instant t , on se propose d'en déduire les coordonnées dans le repère de référence choisi.

3.1 Cas d'un satellite terrestre

Le plan de référence est le plan équatorial, et la direction de référence celle du point γ .

• Retenant dans le plan orbital, la ligne des nœuds comme nouvel axe polaire, on déduit que le nouvel angle polaire à considérer est :

(*) Titius montra en 1766 que la distance a des planètes au Soleil, exprimée commodément en ua, suivait une progression mathématique simple. Sa loi fut publiée en 1772 par son compatriote allemand Johann Elert Bode (1747-1826). On l'exprime par la relation :

$$a = 0,4 + 0,3 \times 2^{n-1}, n \geq 1$$

(n est un entier correspondant au rang de la planète. Pour Mercure, $n = 0$ et $a = 0,4$; pour Jupiter, $n = 5$ d'où $a = 5,2$).

$$\omega + \theta = (\vec{L}_{asc}, \vec{L}_{sat})$$

Choisissons le trièdre orthogonal direct $\{O, x_0, y_0, z_0\}$ du référentiel orbital tel que :

$$Ox_0 = FN_A$$

Oy_0 dans le demi-plan orbital supérieur au plan de référence.

On en déduit les coordonnées orbitales cartésiennes :

$$\begin{cases} x_0 = \rho \cos(\omega + \theta) \\ y_0 = \rho \sin(\omega + \theta) \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

- Une première rotation autour de Ox_0 va faire passer au trièdre intermédiaire $\{O, x_i, y_i, z_i\}$

tel que :

$$Ox_i = FN_A$$

$\theta_x = (Oy_0, Oy_i) = -i$ (i , angle d'inclinaison entre plans équatorial et orbital).

La matrice rotation correspondante est :

$$R(-i) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{vmatrix}$$

d'où les coordonnées cartésiennes intermédiaires :

$$\begin{cases} x_i = \rho \cos(\omega + \theta) \\ y_i = \rho \sin(\omega + \theta) \cos i \\ z_i = \rho \sin(\omega + \theta) \sin i \end{cases}$$

- Une deuxième rotation d'axe Oz_i , perpendiculaire au plan de référence, fait passer au trièdre $\{O, x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega\}$ caractérisé par :

$$Oz_\Omega = Oz_i$$

$$\theta_z = (Ox_i, Ox_\Omega) = (\overrightarrow{FN_A}, \overrightarrow{F\gamma}) = -\Omega$$

La matrice rotation est :

$$R(-\Omega) = \begin{vmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On en tire les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} x_\Omega / \rho &= \cos(\omega + \theta) \cos \Omega - \sin(\omega + \theta) \cos i \sin \Omega \\ y_\Omega / \rho &= \cos(\omega + \theta) \sin \Omega + \sin(\omega + \theta) \cos i \cos \Omega \\ z_\Omega / \rho &= \sin(\omega + \theta) \sin i \end{aligned}$$

Compte tenu du choix du trièdre $\{O, x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega\}$, il s'agit des coordonnées cartésiennes équatoriales.

Les coordonnées équatoriales polaires α et δ satisfont à :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\cos(\omega + \theta) \sin \Omega + \sin(\omega + \theta) \cos i \cos \Omega}{\cos(\omega + \theta) \cos \Omega - \sin(\omega + \theta) \cos i \sin \Omega} \\ \sin \delta &= \sin(\omega + \theta) \sin i\end{aligned}$$

On a donc établi les relations permettant de passer de l'anomalie vraie aux coordonnées équatoriales du satellite.

3.2 Cas d'une planète

■ *Passage des coordonnées orbitales à écliptiques*

Le plan de référence est cette fois le plan de l'écliptique, mais la direction de référence est toujours celle du point γ . En conséquence :

– Les formules donnant les coordonnées cartésiennes écliptiques sont formellement identiques à celles donnant les coordonnées cartésiennes équatoriales $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$.

– Les coordonnées écliptiques polaires λ et β satisfont aux mêmes relations :

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \lambda &= \frac{\cos(\omega + \theta) \sin \Omega + \sin(\omega + \theta) \cos i \cos \Omega}{\cos(\omega + \theta) \cos \Omega - \sin(\omega + \theta) \cos i \sin \Omega} \\ \sin \beta &= \sin(\omega + \theta) \sin i\end{aligned}$$

■ *Translation du repère écliptique*

On note à présent (x_p, y_p, z_p) les coordonnées d'une planète quelconque P dans le repère écliptique héliocentrique, c'est-à-dire de centre S le Soleil, d'axes tels que $Ox = S\gamma$, Oy soit dans le plan écliptique et Oz perpendiculaire dirigé vers le Nord.

Considérons maintenant le repère écliptique géocentrique, de centre T ; il se déduit du précédent par la translation de vecteur $\overrightarrow{ST}$.

Les coordonnées (x, y, z) de la planète dans ce repère découlent de la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{ST}$$

comme illustré à la figure 11.2 ci-après.

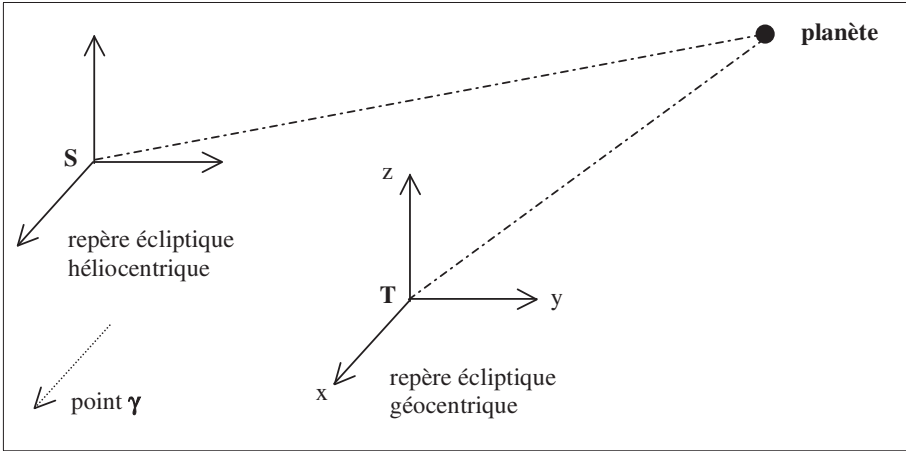


Figure 11.2 Coordonnées dans le repère écliptique translaté.

Elles sont donc :

$$\begin{cases} x = x_P - x_T \\ y = y_P - y_T \\ z = z_P - z_T \end{cases}$$

Les coordonnées (x_P, y_P, z_P) et (x_T, y_T, z_T) correspondent à $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$.

Des coordonnées cartésiennes écliptiques (x, y, z) ainsi calculées, on en déduit les nouvelles longitude et latitude qui satisfont à :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y_P - y_T}{x_P - x_T}$$

$$\sin \beta = \frac{z_P - z_T}{\sqrt{(x_P - x_T)^2 + (y_P - y_T)^2 + (z_P - z_T)^2}}$$

Pour conclure, on rappelle les formules permettant de passer des coordonnées polaires écliptiques à équatoriales :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varepsilon \sin \lambda - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}{\cos \lambda}$$

$$\sin \delta = \cos \varepsilon \sin \beta + \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda$$

Là aussi, on a établi les relations permettant de passer de l'anomalie vraie aux coordonnées équatoriales terrestres de la planète.

exercices

E11-1 Satellites semi-synchrones MOLNYA

Les satellites géostationnaires ne permettent pas de couvrir les régions de latitude élevée ; en outre, la qualité de la transmission est dégradée s'ils apparaissent trop bas sur l'horizon. Aussi, dès 1967, les soviétiques ont mis au point un système de télécommunications par satellites apte à assurer une couverture permanente du pays. Quatre satellites sont répartis sur une orbite nettement inclinée sur l'équateur et fortement elliptique. Ces satellites, dénommés MOLNYA (MOLNIYA dans la littérature anglo-saxonne), « éclair » en russe, ont tous un phasage 2.1 : ils sont **semi-synchrones**, c'est-à-dire de période T_{Mol} moitié de celle de la Terre.

L'inclinaison i du plan de l'orbite satisfait en fait à la relation $5 \cos^2 i - 1 = 0$. Ceci permet de stopper la dérive de l'axe des apsides dont sont affectées les orbites des satellites artificiels du fait de l'aplatissement de la Terre. D'autre part, au nœud ascendant N_A , le satellite est à 65° Est du méridien de Greenwich.

1. On considère un point M de la surface terrestre de latitude L et longitude G . Par ailleurs on note T la **trace** du satellite, c'est-à-dire l'intersection du rayon FS avec le sol (F est le centre de la Terre et S la position du satellite à l'instant considéré).

a) Calculer la vitesse angulaire de rotation Ω_T de la Terre autour de son axe des pôles et en déduire, en fonction de L , la vitesse tangentielle V_M du point M ; la calculer pour $L = i$.

b) On veut que la trace T apparaisse confondue le plus longtemps possible avec le point M :

Quelles sont les implications sur le vecteur vitesse $\vec{V}_A$ à l'apogée ?

En déduire la position du plan d'orbite dans le référentiel géocentrique, et faire un schéma précisant l'orbite autour de la Terre.

2. On se propose maintenant de calculer les caractéristiques de l'orbite d'un satellite satisfaisant aux contraintes ci-dessus.

a) Connaissant le rayon R_{sat} d'une orbite géostationnaire, en déduire le grand axe a de l'orbite MOLNYA.

b) À partir de l'expression de la vitesse V_A en fonction de l'excentricité e et des caractéristiques déjà connues, en déduire la vitesse V_T de la trace ; puis, par identification, l'expression littérale de e en fonction de $\cos i$. Faire l'application numérique.

c) Calculer à l'apogée et au périgée la vitesse tangentielle V , la vitesse angulaire Ω par rapport à l'axe des pôles, le rayon ρ et l'altitude H .

3. Dans cette troisième partie, nous allons déterminer la position du satellite sur son orbite et dans le référentiel terrestre.

a) À l'aide d'un tableur, dresser un tableau donnant pour l'anomalie vraie θ variant de 0° à 180° par pas de 15° :

l'anomalie excentrique φ ; le temps t écoulé à partir du périégée en secondes et h , min, s ; l'altitude H et la vitesse V .

b) Exprimer les formules donnant l'ascension droite α et la déclinaison δ (voir paragraphe 3.1 du présent chapitre) compte tenu des éléments connus (inclinaison i et argument du périégée ω). Donner α en fonction de l'ascension droite du nœud ascendant Ω (ne pas confondre avec une vitesse angulaire !) en P, N_a, A, N_d .

Connaissant la vitesse de rotation de la Terre et les temps de passage du satellite, calculer directement la longitude G de MOLNYA en ces points. Que vaut la latitude L correspondante ?

c) Écrire la relation permettant de passer de l'ascension droite du satellite à sa longitude ; l'expliciter pour une date donnée. Dans le cas présent, seule la longitude G_{Na} au nœud ascendant est connue, en déduire la valeur de Ω .

Pour θ variant de 0° à 360° par pas de 30° , donner dans un tableau :

l'ascension droite α , l'angle de rotation terrestre θ_T , le temps t (h min s), la longitude G et la latitude L .

Données :

Rayon terrestre	R	=	6 378 km
Rayon de l'orbite géostationnaire	R_{sat}	=	42 164 km
Période sidérale de la Terre	T	=	86 164,1 s.

solutions

1. Étude de l'orbite

a) $\vec{V}_M$

La vitesse de rotation de la Terre est : $\Omega_T = \frac{2\pi}{T} = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ rd/s}$
 $= 4,1781 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{s}$

Vitesse tangentielle de M : $V_M(L) = \frac{2\pi}{T} R \cos L$
 $= 0,4651 \cos L \text{ km/s}$

Pour $L = i$, $\cos L = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $V_M = 0,2080 \text{ km/s}$

b) Conditions sur $\vec{V}_A$ et plan d'orbite

C'est à l'apogée que la vitesse du satellite est la plus faible ; donc, si possible, la ligne des apsides PA devra passer par M. D'autre part, $\vec{V}_A$ devra être colinéaire à $\vec{V}_M$ afin que la vitesse $\vec{V}_T$ de la trace le soit également. En conséquence, $\vec{V}_A$ sera orthogonal au plan contenant l'axe polaire et la ligne des apsides. Il n'y a pas d'impossibilité, car l'on sait que pour une trajectoire elliptique, l'angle α du vecteur vitesse avec le rayon vecteur est précisément égal à 90° au périégée P et à l'apogée A (voir chapitre 3, paragraphe 4.1).

Rayon vecteur $\overrightarrow{FA}$ et vecteur vitesse en A déterminent le plan d'orbite dont l'intersection avec l'équateur donne la ligne des nœuds. La ligne des nœuds située dans le plan équatorial est perpendiculaire à l'axe des pôles tout comme $\vec{V}_A$; elle est donc parallèle à ce vecteur puisqu'ils sont dans un même plan à savoir le plan d'orbite.

Le plan d'orbite contenant $\vec{V}_A$, il en découle qu'il est perpendiculaire au plan défini par l'axe des pôles et la ligne des apsides, tout comme le plan équatorial. L'angle i de ces deux plans, qui correspond à l'angle de la ligne des apsides avec sa projection sur l'équateur, est donc égal à L :

$$i = 63^\circ,435$$

La figure 11.3 illustre ces considérations géométriques.

2. Caractéristiques de l'orbite MOLNYA**a) Grand axe a**

Pour un satellite de la Terre la 3^e loi de Kepler permet d'écrire : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu_T}{4\pi^2}$

Pour un satellite géostationnaire : $a = R_{\text{sat}}$ et T correspond à la période sidérale ;
pour un satellite MOLNYA : a est l'inconnue, sa période T_{Mol} est la moitié de la période sidérale.

On déduit :

$$\frac{a^3}{T_{\text{Mol}}^2} = \frac{4a^3}{T^2} = \frac{R_{\text{sat}}^3}{T^2} = \frac{\mu_T}{4\pi^2} \quad \text{d'où :} \quad a = \frac{R_{\text{sat}}}{\sqrt[3]{4}}$$

L'application numérique donne :

$$a = 26\,562 \text{ km}$$

b) Expression de l'excentricité e

La relation donnant la vitesse V_A en fonction du grand axe a et de la période T_{Mol} (voir chapitre 8, paragraphe 1) est :

$$V_A = \frac{2\pi a}{T_{\text{Mol}}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \frac{4\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

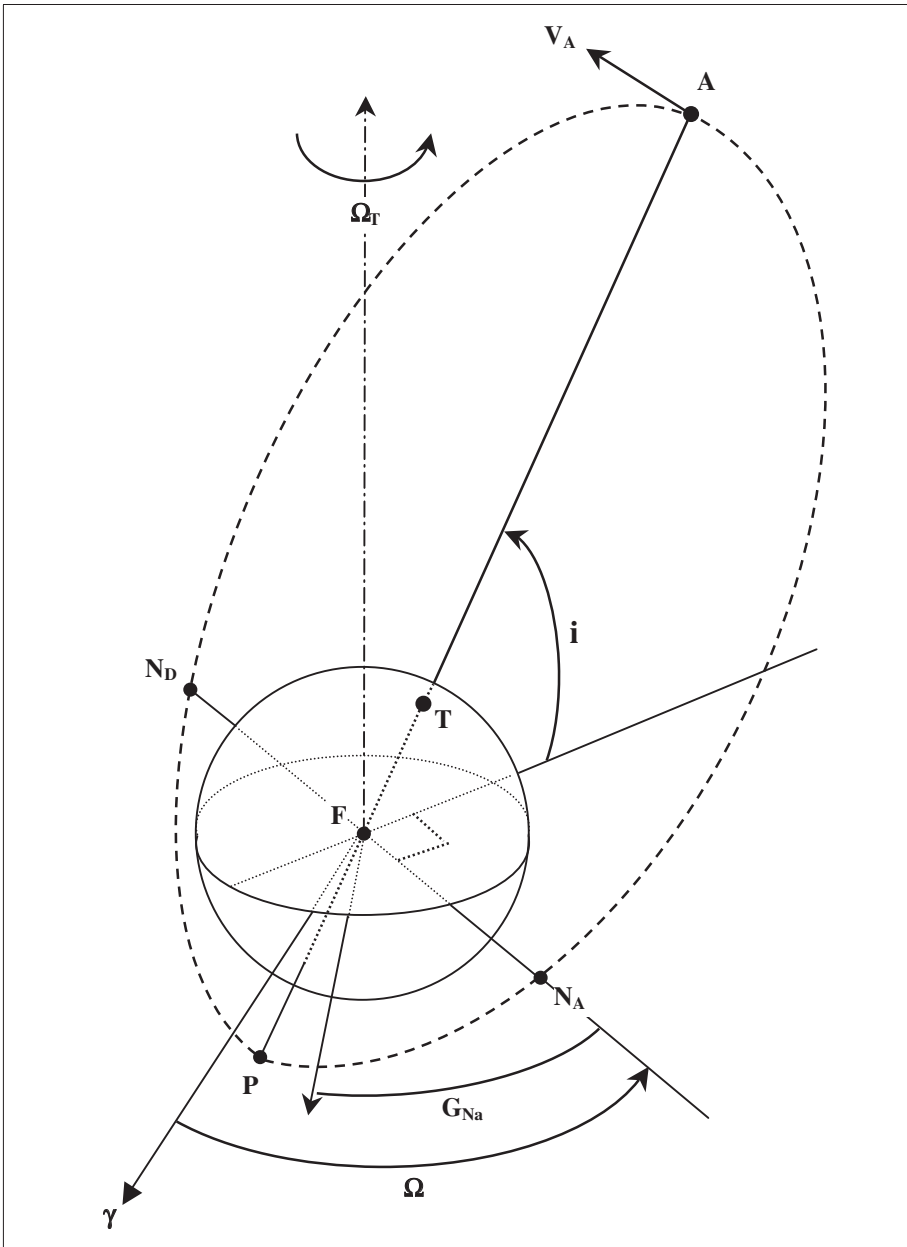


Figure 11.3 Position de l'orbite d'un satellite MOLNYA dans le référentiel géocentrique.

Le rayon à l'apogée est $\rho_A = a(1 + e)$ et le rapport $\frac{V_A}{\rho_A}$ représente la vitesse angulaire $\dot{\theta}_A$ par rapport au foyer F. La vitesse angulaire du point T est bien sûr identique, d'où :

$$V_T = R \frac{V_A}{\rho_A} = \frac{4\pi R}{T} \sqrt{\frac{1-e}{(1+e)^3}}$$

On veut que
$$V_T = V_M = \frac{2\pi}{T} R \cos i$$

On en tire par conséquent la relation permettant d'accéder à l'excentricité :

$$\frac{1-e}{(1+e)^3} = \frac{\cos^2 i}{4} = 0,05$$

et on calcule que

$$e = 0,737\ 66$$



On aurait pu directement écrire que le rapport $\frac{V_A}{\rho_A \cos i}$, qui correspond à la vitesse angulaire de A par rapport à l'axe des pôles, devait être égal à la vitesse de rotation $\frac{2\pi}{T}$ de la Terre.

c) Vitesses, rayon et altitude en A et P

• À l'apogée
$$V_A = \frac{4\pi a}{T} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$\Omega_A = \frac{V_A}{\rho_A \cos i} = \frac{2\pi}{T}$$

On calcule

$$V_A = 1,5052 \text{ km/s}$$

$$\Omega_A = 7,2921 \times 10^{-5} \text{ rd/s}$$

$$\rho_A = a(1 + e)$$

$$H_A = \rho_A - R$$

On calcule

$$\rho_A = 46\ 155 \text{ km}$$

$$H_A = 39\ 777 \text{ km}$$

On rappelle que le rayon de l'orbite géostationnaire est de 42 164 km, correspondant à une altitude de 35 786 km.

• Au périgée
$$V_P = \frac{4\pi a}{T} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\Omega_P = \frac{V_P}{\rho_P \cos i} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2$$

on calcule

$$V_P = 9,9699 \text{ km/s}$$

$$\Omega_P = 319,93 \cdot 10^{-5} \text{ rd/s}$$

notons que Ω_P est pratiquement 44 fois supérieur à Ω_A .

$$\rho_P = a(1 - e)$$

$$H_P = \rho_P - R$$

on calcule

$$\rho_P = 6\ 968 \text{ km}$$

$$H_P = 590 \text{ km}$$

Il est considéré qu'à une altitude supérieure à 500 km le frottement atmosphérique n'est plus préjudiciable au maintien de la trajectoire.

3. Caractéristiques de l'orbite MOLNYA

a) Anomalie excentrique, altitude et vitesse à différents instants

Les formules à utiliser afin d'établir le tableau sont :

$$a) \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

$$b) t = (\varphi - e \sin \varphi) \frac{T_{\text{Mol}}}{2\pi}$$

$$c) H = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} - R$$

$$d) V = \frac{2\pi a}{T_{\text{Mol}}} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

On en déduit le tableau demandé :

θ degrés	φ degrés	t secondes	t h min s	H km	V km/s
(P) 0	0,000	0,0	0 h 00 min 00 s,0	590	9,9699
15	5,857	184,8	0 h 03 min 04 s,8	692	9,8865
30	11,888	380,7	0 h 06 min 20 s,7	1 010	9,6380
45	18,286	601,4	0 h 10 min 01 s,4	1 579	9,2289
60	25,288	865,7	0 h 14 min 25 s,7	2 468	8,6669
75	33,204	1 203,8	0 h 20 min 03 s,8	3 789	7,9625
(N _A) 90	42,468	1 667,2	0 h 27 min 47 s,2	5 730	7,1296
105	53,713	2 350,9	0 h 39 min 10 s,9	8 587	6,1856
120	67,881	3 437,8	0 h 57 min 17 s,8	12 806	5,1525
135	86,338	5 284,7	1 h 28 min 04 s,7	18 932	4,0608
150	110,819	8 534,3	2 h 22 min 14 s,3	27 147	2,9618
165	142,564	13 986,5	3 h 53 min 06 s,5	35 741	1,9800
(A) 180	180,000	21 541,0	5 h 59 min 01 s,0	39 777	1,5052

b) Positions dans le référentiel terrestre

• Ascension droite et déclinaison

Concernant l'inclinaison i : $\cos i = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin i = \frac{2}{\sqrt{5}}$

On remarque que l'argument du périégée, $\omega = 270^\circ \rightarrow \cos(\omega + \theta) = \sin \theta$
 $\sin(\omega + \theta) = -\cos \theta$

D'où :

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5} \sin \theta \sin \Omega - \cos \theta \cos \Omega}{\sqrt{5} \sin \theta \cos \Omega + \cos \theta \sin \Omega} \quad \sin \delta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \theta$$

Au périégée P : $\theta = 0^\circ$ $\alpha = \Omega - 90^\circ$

au nœud ascendant N_A : $\theta = 90^\circ$ $\alpha = \Omega$

À l'apogée A : $\theta = 180^\circ$ $\alpha = \Omega + 90^\circ$

au nœud descendant N_D : $\theta = 270^\circ$ $\alpha = \Omega + 180^\circ$

• Longitude et latitude de MOLNYA en P, N_A, A et N_D

– Pour calculer la longitude du satellite, il faut tenir compte du fait que sa rotation autour de l'axe terrestre est diminuée de celle de notre planète.



La vitesse de rotation de la Terre exprimée ici en °/s est notée V_γ (voir chapitre 10, paragraphe 2). Les calculs sont menés en considérant les longitudes positives dans le sens direct :

$$\text{en P : } G_p(t=0) = G_{Na} - 90^\circ + V_\gamma t_{Na} \rightarrow G_p(0) = 18^\circ,034 \text{ W}$$

$$\text{en N}_A : \rightarrow G_{Na} = 65^\circ \text{ E}$$

$$\text{en A : } G_A = G_{Na} + 90^\circ - V_\gamma \times (t_A - t_{Na}) \rightarrow G_A = 71^\circ,966 \text{ E}$$

$$\text{en N}_D : G_{Nd} = G_{Na} + 180^\circ - V_\gamma \times (t_{Nd} - t_{Na}) \rightarrow G_{Nd} = 78^\circ,932 \text{ E}$$

$$\text{en P : } G_p(t=T_{Mol}) = G_{Na} + 270^\circ - V_\gamma \times (t_{Mol} - t_{Na}) \rightarrow G_p(T_{Mol}) = 161^\circ,966 \text{ E}$$

$$\text{On vérifie que : } G_{Na} - G_p(0) = G_p(T_{Mol}) - G_{Nd} = 83^\circ,034$$

$$G_A - G_{Na} = G_{Nd} - G_A = 6^\circ,966$$

Donc : $G_A - G_p(0) = G_p(T_{Mol}) - G_A = 90^\circ$ (Heureusement, car une demi-période MOLNYA correspond à une rotation de 180° du satellite et de 90° de la Terre !)

– Pour la latitude, on a $L = \delta$; ainsi :

$$\text{en P : } L_p = -63^\circ,435$$

$$\text{en N}_A : L_{Na} = 0^\circ$$

$$\text{en A : } L_A = +63^\circ,435$$

$$\text{en N}_D : L_{Nd} = 0^\circ$$

c) Coordonnées géographiques

La longitude étant toujours comptée dans le sens direct pour les calculs, AHG_γ étant l'angle horaire du point γ , on déduit : $G = \alpha - AHG_\gamma$.

Pour une date donnée, l'angle horaire est connu à 0 h TU ; τ étant le temps écoulé depuis, on a donc :

$$G(\tau) = \alpha(\tau) - (AHG_\gamma(0) + V_\gamma \tau)$$

Dans le cas présent, la date n'est pas donnée ; mais partant de la relation :

$$G(t) = \alpha(t) - V_\gamma t \text{ telle que pour } t=0 \quad G_p(0) = \Omega - 90^\circ$$

On en tire :

$$\Omega = G_p(0) + 90^\circ = 71^\circ,966$$

Nous sommes en mesure de dresser le tableau des longitudes et latitudes :

	θ°	α°	$\theta_T^\circ = V_\gamma \cdot t$	t	G°	L°
(P)	0	-18,034	0,000	0 h 00 min 00 s,0	18,034 W	-63,435
	30	34,205	1,591	0 h 06 min 20 s,7	32,614 E	-50,768
	60	57,488	3,617	0 h 14 min 25 s,7	53,871 E	-26,565
(N _A)	90	71,966	6,966	0 h 27 min 47 s,2	65,000 E	0,000

	120	86,443	14,363	0 h 57 min 17 s,8	72,080 E	26,565
	150	109,727	35,657	2 h 22 min 14 s,3	74,070 E	50,768
(A)	180	161,966	90,000	5 h 59 min 01 s,0	71,966 E	63,435
	210	214,205	144,343	9 h 35 min 47 s,8	69,861 E	50,768
	240	237,488	165,637	11 h 00 min 44 s,3	71,851 E	26,565
(N _D)	270	251,966	173,034	11 h 30 min 14 s,8	78,932 E	0,000
	300	266,443	176,383	11 h 43 min 36 s,4	90,060 E	-26,565
	330	289,727	178,409	11 h 51 min 41 s,3	111,318 E	-50,768
(P)	360	341,966	180,000	11 h 58 min 02 s,0	161,966 E	-63,435

Ce qui permet de représenter la trace sur la carte du monde de la figure 11.4 ci-dessous :

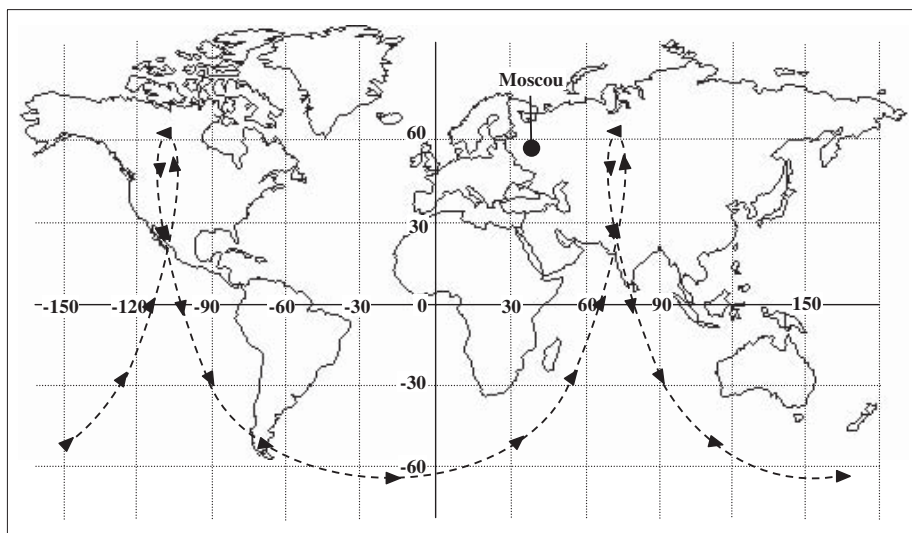


Figure 11.4 Trajectoire de MOLNYA dans le repère terrestre. Le mouvement est **rétrograde** entre les deux extremus de la boucle de part et d'autre de l'apogée. (Vitesse de rotation du satellite par rapport à l'axe des pôles inférieure ou égale à celle de la Terre.)

E11-2 De la trajectoire elliptique aux coordonnées équatoriales de Vénus

• Préambule : Dans ce problème, certaines données sont à rechercher dans des ouvrages : les éléments moyens de Vénus et de la Terre correspondant aux trois variables métriques (demi-grand axe a , excentricité e , incidence i) et aux trois variables angulaires (longitude moyenne λ , longitude du péricentre ϖ ,

longitude du nœud ascendant Ω) sont par exemple fournis dans Introduction aux Éphémérides Astronomiques, page 231 (voir bibliographie).

• On considère le passage de la planète Vénus en quatre points particuliers de sa trajectoire : au périhélie (point P), au nœud descendant (point N_d), à l'aphélie (point A) et au nœud ascendant (point N_a).

1. Dans un premier temps, il s'agit de connaître la date de passage et les coordonnées polaires (θ , ρ) de Vénus pour chacun de ces points.

a) Déterminer les deux dates de passage au périhélie en 2004.

Entre celles-ci, la planète passe successivement en N_d , A, et N_a (ordre que l'on pourra vérifier par la suite); calculer les dates de passage en ces points, ainsi que l'anomalie vraie correspondante.

b) Quelle est la valeur du rayon – distance Vénus-Soleil – en chacun des points considérés ? L'exprimer en unités astronomiques et en kilomètres.

2. On doit maintenant obtenir les coordonnées écliptiques héliocentriques cartésiennes de Vénus et de la Terre aux dates correspondant aux points P, N_d , A, et N_a de Vénus.

a) Calculer les coordonnées cartésiennes de Vénus (ua et km) ; on les présentera dans un tableau faisant apparaître les trois angles ω (argument du péri-centre), Ω et i .

b) Calcule des coordonnées cartésiennes de la Terre.

On rappelle que l'anomalie vraie se déduit de l'anomalie moyenne M par l'intermédiaire de l'anomalie excentrique ϕ .

Calculer θ puis ρ : faire un tableau des valeurs de θ , a , e , ρ en ua et km.

Dans un deuxième tableau on donnera, toujours pour les quatre dates, les valeurs de ω , M et ϕ , ainsi que les coordonnées cartésiennes.

3. On est en mesure d'atteindre les coordonnées de Vénus dans le repère géocentrique.

a) Donner dans un tableau les coordonnées cartésiennes de la planète dans le repère écliptique géocentrique, ainsi que sa distance à la Terre.

b) En déduire :

– les coordonnées polaires écliptiques (longitude λ , latitude β) ;

– les coordonnées équatoriales (ascension droite α , déclinaison δ), sachant que l'obliquité est légèrement dépendante du temps :

$$\varepsilon \approx 23^\circ 26' 21'',412 - 468'',096 \tau$$



Les calculs effectués à l'aide d'un tableur seront menés en veillant à la cohérence de précision des grandeurs intervenant dans chacune des étapes ; toutefois, pour plus de clarté, les angles seront écrits en $^\circ$, $'$ et $''$ et les dates en h, min, s sans que figurent les centièmes de secondes.

1. Date et coordonnées (ρ , θ) de points particuliers de la trajectoire elliptique de Vénus

a) *Date et anomalie vraie des passages aux périhélies en 2004, au nœud descendant, à l'aphélie et au nœud ascendant entre eux-ci*

• Passages aux périhélies

Pour $\tau = 0$, c'est-à-dire au 1^{er} janvier 2000 à 12 heures TU, la différence entre la longitude moyenne λ et la longitude du péricentre ϖ est positive :

$$\lambda(0) - \varpi(0) = M(0) = 50^\circ 24' 58''$$

Ainsi, le premier passage au périhélie de l'année 2000 correspond à $m = 1$ et satisfait à :

$$\lambda(t_{p,1} - t_0) - \varpi(t_{p,1} - t_0) = 360^\circ$$

Le premier passage au périhélie de l'année 2004 correspond à $m = 7$ et satisfait à :

$$\lambda(t_{p,7} - t_0) - \varpi(t_{p,7} - t_0) = 360^\circ \times 7 = 2520^\circ$$

On déduit, après quelques itérations (on note $t_p = t_{p,7}$) :

$$\begin{aligned} \tau = 0,004\,220\,226\,057 &\rightarrow t_p = 2\,453\,086,437\,567\,\text{JJ} \\ &\rightarrow \text{date} = 21/03/04 \text{ à } 22\,\text{h}\,30\,\text{min}\,06\,\text{s} \end{aligned}$$

et pour l'anomalie vraie, on retient $\theta_p = 0^\circ$

Pour le deuxième passage au périhélie de 2004, il vient :

$$\begin{aligned} \tau = 0,004\,835\,423\,370 &\rightarrow t_{p,8} = 2\,453\,311,138\,386\,\text{JJ} \\ &\rightarrow \text{date} = 01/11/04 \text{ à } 15\,\text{h}\,19\,\text{min}\,17\,\text{s} \end{aligned}$$

et pour l'anomalie vraie, on retient $\theta = 360^\circ$

On remarque que $t_{p,8} - t_{p,7} = 224,7008$ jours.

• Passage au nœud descendant N_d

L'anomalie vraie θ_{Nd} se déduit de l'argument du péricentre : $\theta_{Nd} = 180^\circ - \omega$.

L'anomalie excentrique φ_{Nd} se déduit de la relation :

$$\sin \varphi_{Nd} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta_{Nd}}{1 + e \cos \theta_{Nd}}$$

établie au chapitre 5 (paragraphe 1.2) ; et on en tire l'anomalie moyenne M_{Nd} par l'équation de Kepler :

$$\varphi_{Nd} - e \sin \varphi_{Nd} = M_{Nd}$$

Le temps t_{Nd} du passage au nœud descendant satisfait à :

$$\lambda(t_{Nd} - t_0) - \varpi(t_{Nd} - t_0) = 2520^\circ + M_{Nd}$$

Il convient de noter que l'argument du péricentre et l'excentricité dépendent « légèrement » de τ ; après quelques itérations, on obtient :

$$\tau = 0,004\,432\,909\,024 \rightarrow t_{Nd} = 2\,453\,164,120\,021\,JJ$$

$$\rightarrow \text{date} = 07/06/04 \text{ à } 14 \text{ h } 52 \text{ min } 50 \text{ s}$$

et pour l'anomalie vraie, on retient $\theta_{Nd} = 125^\circ 05' 38''$

À titre indicatif, $\omega = 54^\circ 54' 22''$ et $M_{Nd} = 124^\circ 27' 27''$

• Passage à l'aphélie

L'équation à résoudre est : $\lambda(t_A - t_0) - \varpi(t_A - t_0) = 2520^\circ + 180^\circ = 2700^\circ$
ce qui conduit à

$$\tau = 0,004\,527\,824\,714 \rightarrow t_A = 2\,453\,198,787\,977\,JJ$$

$$\rightarrow \text{date} = 12/07/04 \text{ à } 06 \text{ h } 54 \text{ min } 41 \text{ s}$$

et pour l'anomalie vraie, on retient $\theta_A = 180^\circ$

• Passage au nœud ascendant N_a

L'argument vrai est : $\theta_{Na} = 360^\circ - \omega$

La méthode est la même que pour le passage en N_d .

t_{Na} satisfait à : $\lambda(t_{Na} - t_0) - \varpi(t_{Na} - t_0) = 2520^\circ + M_{Na}$

On retient :

$$\tau = 0,004\,742\,674\,407 \rightarrow t_{Na} = 2\,453\,277,261\,827\,JJ$$

$$\rightarrow \text{date} = 28/09/04 \text{ à } 18 \text{ h } 17 \text{ min } 02 \text{ s}$$

et pour l'anomalie vraie, on retient $\theta_{Na} = 305^\circ 05' 33''$

À titre indicatif, $\omega = 54^\circ 54' 27''$ et $M_{Na} = 305^\circ 43' 31''$

b) Rayons aux points P , N_d , A , N_a

La formule donnant la distance de Vénus au Soleil est : $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$

Les résultats sont donnés ci-dessous :

point	θ ° ' ''	a ua	e	ρ ua	ρ km
P	0°	0,723 329 820	0,006 769 901	0,718 432 949	107 476 039
N_d	125° 05' 38''	0,723 329 820	0,006 769 799	0,726 122 805	108 626 425
A	180°	0,723 329 820	0,006 769 754	0,728 226 585	108 941 146
N_a	305° 05' 33''	0,723 329 820	0,006 769 651	0,720 492 618	107 784 161

2. Coordonnées écliptiques héliocentriques cartésiennes de Vénus et de la Terre aux dates des points P, N_d, A et N_a

a) Coordonnées cartésiennes de Vénus

On utilise les formules établies au paragraphe 3 de ce chapitre, soit :

$$\begin{aligned}x_v &= \rho [\cos(\omega + \theta) \cos \Omega - \sin(\omega + \theta) \cos i \sin \Omega] \\y_v &= \rho [\cos(\omega + \theta) \sin \Omega + \sin(\omega + \theta) \cos i \cos \Omega] \\z_v &= \rho \sin(\omega + \theta) \sin i\end{aligned}$$

L'anomalie vraie θ et le rayon ρ figurent dans le tableau précédent. La longitude du nœud ascendant Ω , ainsi que l'inclinaison i sont directement fournies ; l'argument du péricentre ω est égal à la longitude du péricentre ϖ diminuée de celle du nœud ascendant.

Le tableau suivant donne les angles ω , Ω , i et les trois coordonnées x_v , y_v , z_v (valeurs en ua pour la cellule supérieure, et en km pour la cellule inférieure).

point	ω	Ω	i	x_v (ua/km)	y_v (ua/km)	z_v (ua/km)
P	54° 54' 18"	76° 43' 05"	3° 23' 41"	-0,476 197 064 - 71 238 067	0,536 815 340 80 306 432	0,034 807 310 5 207 100
N _d	54° 54' 22"	76° 43' 12"	3° 23' 41"	-0,166 799 368 - 24 952 830	-0,706 705 242 -105 721 599	0 0
A	54° 54' 23"	76° 43' 15"	3° 23' 41"	0,482 729 496 72 215 305	-0,544 096 809 - 81 395 724	-0,035 282 500 - 5 278 187
N _a	54° 54' 27"	76° 43' 22"	3° 23' 41"	0,165 471 883 24 754 241	0,701 233 676 104 903 065	0 0

b) Coordonnées cartésiennes de la Terre

D'une façon générale, quelle que soit la planète, le cheminement est le suivant :

- connaissant le jour julien, on déduit τ ;
- on obtient directement a , e , i , Ω , ainsi que ϖ et λ ;
- on déduit $\omega = \varpi - \Omega$ et $M = \lambda - \varpi$ que l'on ramène à l'intervalle (0°, 360°) ;
- à partir de l'équation de Kepler on atteint ϕ ;

$$\text{– l'argument vrai se déduit de la formule : } \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \phi}{1 - e \cos \phi}$$

Pour la Terre, on note que $\Omega = 0^\circ$ d'où $\omega = \varpi$ et $M = \lambda - \omega$
 $i = 0^\circ$

Aux dates correspondant aux quatre points considérés, le premier tableau qui suit donne en particulier θ et ρ ; le deuxième donne x_T et y_T sachant que $z_T = 0$.

point	θ ° ' ''	a ua	e	ρ ua	ρ km
P	78° 38' 34"	1,000 001 018	0,016 706 860	0,996 443 566	149 065 836
N _d	154° 10' 40"	1,000 001 018	0,016 706 771	1,014 985 850	151 839 722
A	187° 15' 29"	1,000 001 018	0,016 706 731	1,016 569 367	152 076 613
N _a	262° 56' 39"	1,000 001 018	0,016 706 641	1,001 777 767	149 863 821

point	ω	M	φ	x _T (ua/km)	y _T (ua/km)
P	103° 00' 36"	76° 46' 13"	77° 42' 20"	- 0,996 029 109 - 149 003 834	- 0,028 736 654 - 4 298 942
N _d	103° 00' 49"	153° 20' 03"	153° 45' 27"	- 0,225 020 182 - 33 662 540	- 0,989 728 343 - 148 061 253
A	103° 00' 55"	187° 30' 11"	187° 22' 48"	0,352 239 775 52 694 320	- 0,953 593 424 - 142 655 546
N _a	103° 01' 08"	264° 50' 49"	263° 53' 42"	0,996 357 395 149 052 945	0,104 070 344 15 568 702

3. Coordonnées de Vénus dans le repère géocentrique

a) Coordonnées cartésiennes et distance à la Terre

Les coordonnées cartésiennes dans le repère écliptique géocentrique sont :

$$x_V - x_T \quad y_V - y_T \quad z_V - z_T$$

La distance à la Terre est : $\sqrt{(x_V - x_T)^2 + (y_V - y_T)^2 + (z_V - z_T)^2}$

On en déduit le tableau :

Point (date)	x _V - x _T ua / km	y _V - y _T ua / km	z _V - z _T ua / km	Distance à la Terre (ua / km)
P (21/03/04)	0,519 832 045 77 765 767	0,565 551 994 84 605 374	0,034 807 310 5 207 100	0,768 951 209 115 033 463
N _d (07/06/04)	0,058 220 814 8 709 710	0,283 023 101 42 339 653	0 0	0,288 949 371 43 226 211
A (12/07/04)	0,130 489 721 19 520 984	0,409 496 615 61 259 822	- 0,035 282 500 - 5 278 187	0,431 230 680 64 511 191
N _a (28/09/04)	- 0,830 885 511 - 124 298 703	0,597 163 332 89 334 363	0 0	1,023 217 855 153 071 212

b) Coordonnées polaires écliptiques et équatoriales

- Coordonnées écliptiques λ et β

La longitude λ se déduit de :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y_V - y_T}{x_V - x_T}$$

La latitude β se déduit de :

$$\sin \beta = \frac{z_V - z_T}{\sqrt{(x_V - x_T)^2 + (y_V - y_T)^2 + (z_V - z_T)^2}}$$

- Coordonnées équatoriales α et δ

L'ascension droite α se déduit de : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varepsilon \sin \lambda - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}{\cos \lambda}$

La déclinaison δ se déduit de : $\sin \delta = \cos \varepsilon \sin \beta + \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda$

L'obliquité ε dépend légèrement du temps :

$$\varepsilon \approx 23^\circ 26' 21'',412 - 468'',096 \tau$$

À la précision affichée, elle vaut $23^\circ 26' 19''$

Le tableau suivant donne la longitude, la latitude, l'ascension droite ainsi que la déclinaison en « °, ', '' » ; l'ascension droite y est également convertie en « h, min, s ».

point	longitude λ	latitude β	ascension	droite α	déclinaison δ
P	47° 24' 43''	2° 35' 40''	44° 10' 23''	2 h 56 min 42 s	19° 31' 01''
N _d	78° 22' 33''	0	77° 21' 46''	5 h 09 min 27 s	22° 55' 49''
A	72° 19' 30''	-4° 41' 35''	71° 29' 20''	4 h 45 min 57 s	17° 37' 01''
N _a	144° 17' 42''	0	146° 35' 56''	9 h 46 min 24 s	13° 25' 24''

E11-3 Coordonnées équatoriales de Vénus par les éphémérides

Le but de cet exercice est de confronter les résultats obtenus à l'exercice E11-2 avec ceux des *Éphémérides Astronomiques 2004* du Bureau des longitudes (voir bibliographie).

Il s'agit de calculer l'ascension droite, la déclinaison et la distance à la Terre de la planète Vénus pour les dates 2004 suivantes :

21 mars à 22 h 30 min 06 s (DJ = 2 453 086,437 567 JJ)

07 juin à 14 h 52 min 50 s (DJ = 2 453 164,120 021 JJ)

12 juillet à 06 h 54 min 41 s (DJ = 2 453 198,787 977 JJ)

28 septembre à 18 h 17 min 02 s (DJ = 2 453 277,261 827 JJ)

Les dates ci-dessus ont pour référence le temps universel, alors que celui des Éphémérides Astronomiques est précisément le temps des éphémérides : pour l'année 2004, on prendra

$$TE \approx UTC + 65 \text{ s}$$

1. Pour chacune des dates t , on effectuera les étapes suivantes :

a) Repérer dans l'ouvrage le tableau dans lequel elle se situe et noter la date initiale t_0 ainsi que l'amplitude DT .

Calculer $t - t_0$ à partir des dates en heures et celles en jours juliens.

Calculer $x = -1 + 2(t - t_0)/DT$ et $\theta = \text{Arccos } x$

b) Les coefficients a du tableau sont indexés de 0 à 9 et les polynômes de Tchebychev de rang 1 à 9 se calculent comme suit : $T_p(x) = \cos p\theta$

Les trois grandeurs recherchées auront pour expression générale :

$$y = a_0 + a_1 T_1(x) + \dots + a_p T_p(x) + \dots + a_n T_n(x)$$

($n = 9$ pour la précision maximum).

Effectuer les calculs à l'aide d'un tableur et regrouper les résultats dans un tableau en fonction de la date. L'ascension droite sera exprimée en heures, minutes et secondes ; la déclinaison en degrés, minutes et secondes d'arc ; la distance en unités astronomiques.

2. Confronter les résultats de l'exercice E11-2 avec ceux qui viennent d'être obtenus. Commenter.

solutions

1. Étapes des calculs et tableau des résultats

a) Étapes

On donne les détails pour la première date :

– conversion en temps des éphémérides $\rightarrow$ 21/03/2004 à 22 h 31 min 11 s (ajout de 65 s)

– le tableau qui convient va du 0 mars 0 h au 2 avril 0 h et $DT = 33$ jours

– jour de l'année du 0 mars (29 février) = 60 ; du 21 mars = 81 $\rightarrow \Delta J = 21$

– $t - t_0 = 21 + 22/24 + 31/1440 + 11/86400 = 21,938\,322$ jours

– le jour julien correspondant au 29 février à 0 h est 2 453 064,5

– $t - t_0 = 2\,453\,086,437\,567 + 65/86400 - 2\,453\,064,5 = 21,938\,319$ jours (à retenir)

– $x = -1 + 2(t - t_0)/DT = 0,329\,595\,110 \rightarrow \theta = \text{Arccos } x = 1,234\,921\,637$

b) Tableau

– les polynômes sont calculés avec le tableur : par exemple,

$$T_2(2\theta) = -0,782\,734\,127$$

– la grandeur désirée y se calcule avec les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_9$ correspondants :

$$y = a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots + a_9 T_9(x)$$

– Résultats :

Date 2004	Asc. droite	Déclinaison	Distance (ua)
21/03 22 h 30 min 06 s	2 h 56 min 39 s,4	19° 30' 56",8	0,768 913 47
07/06 14 h 52 min 50 s	5 h 09 min 21 s,9	22° 55' 47",7	0,288 952 05
12/07 06 h 54 min 41 s	4 h 45 min 53 s,9	17° 37' 04",7	0,431 318 26
28/09 18 h 17 min 02 s	9 h 46 min 20 s,7	13° 25' 42",2	1,023 165 55

2. Comparaison avec les résultats de E11-2

Le tableau qui suit donne un ordre de grandeur de la précision que l'on peut espérer en conduisant les calculs à partir des éléments moyens des variables elliptiques.

Date 2004	Asc. droite	Déclinaison	Distance (ua)
21/03 22 h 30 min 06 s	2 h 56 min 42 s $\pm$ 5 s	19° 31' 01" $\pm$ 4"	0,768 95 $\pm$ 9 10^{-5}
07/06 14 h 52 min 50 s	5 h 09 min 27 s $\pm$ 5 s	22° 55' 49" $\pm$ 4"	0,288 95 $\pm$ 9 10^{-5}
12/07 06 h 54 min 41 s	4 h 45 min 57 s $\pm$ 5 s	17° 37' 01" $\pm$ 4"	0,431 23 $\pm$ 9 10^{-5}
28/09 18 h 17 min 02 s	9 h 46 min 24 s $\pm$ 5 s	13° 25' 24" (?)	1,023 22 $\pm$ 9 10^{-5}

On notera en outre que les coordonnées géocentriques des planètes calculées par les *Éphémérides Astronomiques* sont des coordonnées apparentes dérivant des coordonnées vraies qui sont rapportées à l'équateur (plan équatorial) et à l'équinoxe (nœud ascendant) vrais, c'est-à-dire affectés de la précession et de la nutation. On rappelle que les coordonnées moyennes ne tiennent pas compte de cette nutation.

➤ Remarque

Les exercices de ce dernier chapitre nous ont montré comment obtenir en fonction du temps la trace au sol d'un satellite, ou les coordonnées équatoriales terrestres d'une planète à partir de leur position connue sur l'orbite. Un des objectifs de cet ouvrage était en effet de nous rendre aptes à traiter ce genre de problème, mais il nous permettra d'en appréhender bien d'autres, comme nous avons pu le constater à travers la résolution d'un certain nombre d'exercices proposés dans les chapitres précédents.

Toutefois, au-delà de cet aspect didactique, nous avons également voulu, lorsque l'occasion se présentait, préciser notre environnement spatial et évoquer les noms de certains scientifiques qui ont permis de percer les secrets de la mécanique qui l'anime.

Puisse cet ouvrage inciter le lecteur à voyager dans l'espace en observant par exemple le mouvement des astres sous la vaste coupole d'un planétarium, ou encore en suivant les périples de véhicules de croisière interplanétaires et autres sondes spatiales... Il pourra alors choisir sa destination

· parmi les nombreuses missions envisagées pour la prochaine décennie, et
· dont certaines ont déjà vu le jour.

· À titre indicatif :

· – le lancement de Mars Reconnaissance Orbiter a eu lieu le 12 août 2005
· à cap Canaveral et la sonde a atteint la planète le 10 mars 2006 pour subir
· une phase d'aérofreinage l'amenant sur son orbite scientifique ;

· – la sonde européenne Rosetta est passée au plus près de Mars le 25 février
· 2006 et subira d'autres manœuvres gravitationnelles avant d'aller larguer
· un petit atterrisseur sur la comète Churyumov-Gerasimenko en 2014 et
· rester ensuite en orbite pendant une année ;

· – la mission New Horizons Pluto-Kuiper Belt de la NASA s'est concrétisée
· le 19 janvier 2006, jour du lancement de la sonde qui a bénéficié un an
· après de l'assistance gravitationnelle de Jupiter afin de visiter le couple
· Pluton-Charon en juillet 2015, pour se diriger ensuite vers les confins de
· notre système solaire ;

· – la mission Bepi Colombo vers Mercure qui s'articule autour de deux
· orbiteurs, un de l'Agence spatiale européenne et l'autre de l'Agence
· spatiale japonaise, devrait être lancée du Centre spatial guyanais en 2013
· et le voyage durera 6 ans !

Index

A

Albédo 20
Altitude 190
Amas
 galactique 24
 globulaire 24
Angle
 médian 171
Angle horaire
 local 196
 origine 195
 sidéral 225
Année
 julienne 28
 sidérale 27
 tropique 27
Année-lumière 34
Anomalie
 excentrique 88
 moyenne 88
 vraie 88
Apex 24
Aphélie 47
Apoastre 47
Apocentre 46
Apogée 47
Argument du péricentre 256
Ascension
 verse 225
Ascension droite 225
 du nœud ascendant 255
Astéroïde 21
Astre 20

Astroïde 95
Austral 223
Axe
 des équinoxes 223
 focal 46
 non focal 46
Axe du monde 223
Azimut 190

B

Boréal 223
Bulbe 23
Bureau des longitudes 21

C

Calendrier
 grégorien 28
 julien 28
Catalogue FK4 223
Ceinture principale 22
Centre
 attractif 110
Centre de courbure 75
Cercle
 d'égales hauteurs 193
 équatorial 188
 horaire de l'astre 195
 osculateur 96
 principal 88
Circularisation 157, 207
Coefficient d'aplatissement 47
Colatitude 190

Comète 22
Conique 44
Conjonction 29
Constante
 de gravitation universelle 110
 dynamique
 première 60
 géocentrique de la gravitation 111
 héliocentrique de la gravitation 110
Constante de Gauss 26
Constante dynamique
 deuxième 130
Constellation 220
Coordonnées
 horizontales 190
 terrestres 188
Crépuscule 218

D

Déclinaison 194
Déférent 72
Développée 94
Déviation gravitationnelle 151
Directrice 44
Distance
 focale 47
 polaire 194
 zénithale 192

E

Écliptique 21, 27
Effet catapulte 156
Éléments moyens 258
Enveloppe 94
Épicycle 72
Équant 72
Équateur céleste 27, 223
Équation
 de Kepler 89
 du temps 232
Étoile 20
 double 125
 polaire 28
Excentricité 44

F

Formule
 de Ramanujan 168

Formules
 de Binet 61
Foyer 44
Fuseaux horaires 234

G

Galaxie 23
Géodésique 205
Géosynchrone 139
Grand axe 47
Groupe local 24

H

Hauteur 190
Heure
 légale 234
Horizon du lieu 190

I

Inclinaison 255
Intégrale elliptique 167
Intensité 222

J

Jour
 sidéral 25
 solaire 25
Jour julien 36
 modifié 36

L

Latitude 188
 à la méridienne 202
 écliptique 229
Ligne
 des apsides 256
 des équinoxes 255
 des nœuds 254
Loi des aires 60
Longitude 188
 du péricentre 256
 écliptique 229
 moyenne 257
Luminosité 222
Lunaison 39

M

- Magnitude
 - absolue 222
 - apparente 222
- Méridien 188
 - céleste 223
 - du lieu 191
 - origine 188
- Mille marin 190
- Mois
 - anomalistique 41
 - draconitique 41
 - sidéral 37
 - synodique 38
 - tropique 41
- Monture
 - alt-azimutale 193
 - équatoriale 197
- Moyen mouvement 88

N

- Nadir 190
- Nœud
 - ascendant 254
 - descendant 254
- Nomenclature des comètes 101
- Nuage de Oort 22
- Nuit civile 251

O

- Obliquité 27, 229
- Opposition 29
- Orbite
 - de Clarke 138
 - géostationnaire 138
 - géosynchrone 138
- Orbite d'insertion 157

P

- Parallaxe annuelle 35
- Parallèle 188
- Paramètre 45
 - d'impact 151
- Parsec 34
- Périastre 47
- Péricentre 46
- Périgée 47

- Périhélie 47
- Période
 - sidérale 29
 - synodique 28
- Petit axe 47
- Phase 39
- Pied de l'astre 192
- Planète 20, 110
 - jovienne 21
 - tellurique 21
- Point
 - astronomique 203
- Point gamma 27
- Point vernal 27
- Pôle écliptique 229
- Potentiel gravitationnel 128
- Précession des équinoxes 27
- Problème de Lambert 180

Q

- Quadrature 29

R

- Rayon de courbure 75
- Référentiel
 - barycentrique 115
 - de Copernic 115
 - Galiléen 113
 - héliocentrique 110
 - héliocentrique ou de Kepler 115
 - relatif 115
- Réfraction 216
- Rétrograde 273
- Révolution 27
- Rotation 25

S

- Satellite 22
 - constellation de 23
 - semi-synchrone 266
 - synchrone 139
- Sens rétrograde 25
- Sextant 192
- Sonde 146
- Sphère céleste 27, 223
- Sphère d'influence 152
- Spirale
 - de Descartes 82
 - hyperbolique 84

T

Temps

- Atomique International 235
- civil 233
- des éphémérides 235
- moyen 232
- sidéral 226
 - local 226
- sidéral local 236
- Sidéral Moyen de Greenwich 238
- Universel 233
- universel coordonné 235
- vrai 231

Termes séculaires 260

Titius-Bode (loi de) 262

Trace 266

Trajectoire à énergie minimale 150

Triangle de position 199

U

Unité astronomique 32

V

Variable

angulaire 258

elliptique 258

métrique 258

Variation horaire 197

Vertical de l'astre 191

Vitesse

aréolaire 60

cosmique

deuxième 134

première 134

d'entraînement 71, 146, 207

d'injection 146

de lancement 134

de libération 134

minimale de satellisation 133

Voie lactée 23

Z

Zénith 190

Zodiaque 222